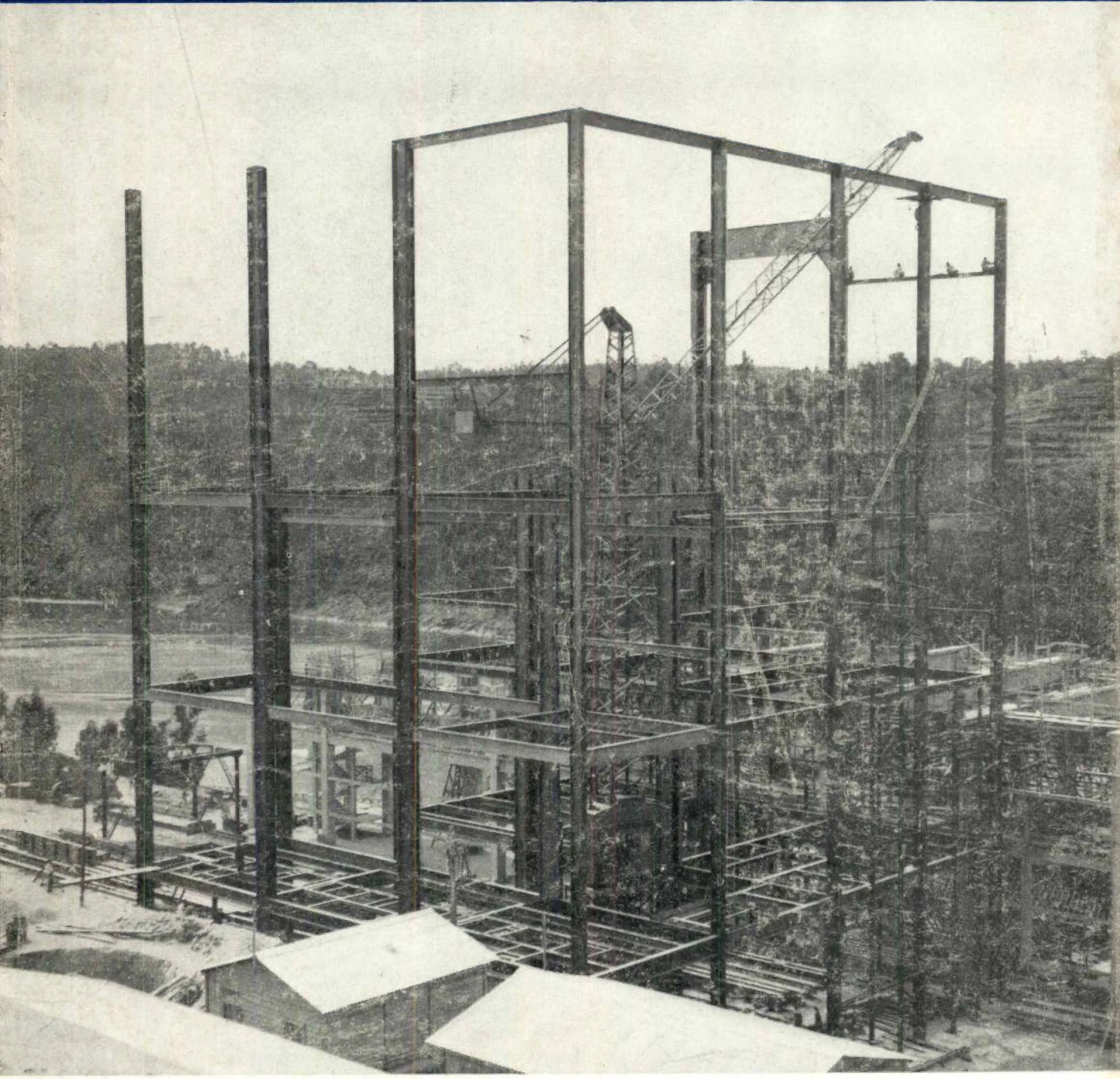
TÉCNICA



REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I. S. T.

N.º 275-OUTUBRO-1957

CIMENTO SECIL

O CIMENTO PARA OBRAS DE GRANDE RESPONSABILIDADE

4 fornos rotativos — 300.000 toneladas anuais

Fábrica no Outão — Setúbal

Lisboa — Rua do Comércio, 56-3.º

Desde o Distrito de **VIANA DO CASTELO** ao de **LEIRIA** e nos Distritos de **SETÚBAL** e **ÉVORA** as

FÁBRICAS
CIDADES
VILAS e
ALDEIAS portuguesas

são abastecidas de

ELECTRICIDADE

para

FORÇA MOTRIZ E TODOS OS USOS INDUSTRIAIS, LUZ, ETC., a TARIFAS MUITO VANTAJOSAS e com as **maiores facilidades,**

pela

UNIÃO ELECTRICA PORTUGUESA

e produzidas nas CENTRAIS:

Thérmica do FREIXO .... 22.000 CV
Hidráulica do LINDOSO..... ... 100.000 CV
Thérmica da CACHOFARRA... 14.000 CV

Os Escritórios da UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA são:

NO PORTO Rua Duque de Loulé, 148
EM LISBOA Rua Rosa Araújo, 35

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

RUA D. ESTEFÂNIA, 42
TELEF. 47812-50129
LISBOA

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA DOS ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Ano XXXII - N.º 275 Outubro de 1957

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-N. * TELEF. 77 01 44 (Linha 50)

DIRECTOR

CARLOS MANUEL DE MEDEIROS PORTELA

ADMINISTRADOR

RICARDO MANUEL SIMÕES BAYÃO HORTA

SECRETÁRIO

ALEXANDRE CERVEIRA

REDACTORES

ARTUR BAPTISTA
JOÃO MARTINS DE CARVALHO
JOÃO ULRICH
JORGE FONTAINHAS

★

NUMERO AVULSO 12$50

ASSINATURAS:

	3 N.os	5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	32$50	50$00	95$00
Ultramar Português e Espanha	—	55$00	100$00
Estrangeiro	—	60$00	110$00

★

EDITOR E PROPRIETÁRIO

ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

★

COMPOSTO E IMPRESSO NA

Tip. JORGE FERNANDES, L.da

RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Estrutura resistente (metálica) da sala das caldeiras da nova Central Térmica da F. T. P. fabricada e montada pela MAGUE — S. F. Moniz da Maia & Vaz Guedes, Ld.ª — Alverca. (Excluída a estrutura das caldeiras). O tamanho dos montadores sobre o lintel superior dá a escala da gravura.

Págs.

A Investigação e o Ensino
Pelo Eng.º Luís A. de Almeida Alves 1

Estudo das «séries no tempo» e sua aplicação à determinação da resposta de sistemas lineares de transmissão
Pelo Eng.º Manuel José Abreu e Faro 5

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e consumo de energia na rede eléctrica nacional** . . . . . 22 e 38

O Método de Relaxação — Sua aplicação ao cálculo de estruturas recticulares contínuas planas contendo peças curvas
Pelo Eng.º António Pacheco Correia de Cintra 23

Prospecção Gravimétrica — O problema da interpretação
Pelo Eng.º José Quintino Rogado 39

Do Mundo Técnico 58

Biblioteca 61

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

A

Pág.

Agência Comercial, Ltd.ª XIII
Agência Geral de Material Eléctrico, Ltd.ª XII
Ahlers, Lindley, Ltd.ª XXVI
Atlantic — Fábrica Lusitana de Tintas e Vernizes, Limitada XLI
António Baró XLIIII
António Pacheco Agostinho XXXV
Azevedo & Pessi, Ltd.ª XVII
Auto Lusitânia XXXV

B

Blackwood Hodge IV
Bouhon & Irmão, Ltd.ª XIII

C

Canelas & Figueiredo, Ltd.ª XXIV
Cekop XXIX
Cimento Secil . . . . . 2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos . . VI
Companhia «Cimento Tejo» X
Companhia Portuguesa dos Petróleos BP XXII
Companhia União Fabril XX
Construções Técnicas, Ltd.ª XI
C. Santos, Ltd.ª . . . . . VIII e XXXVII

E

Edmond Dardel II
Emílio de Azevedo Campos & C.ª, Ltd.ª XXV
Empresa Electro Cerâmica VI
Empresa de Produtos Asfálticos . . . XLIII
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . . . 3.ª da capa
Eng.º Augusto Cavaco XIII

F

Fábrica Metalúrgica e Construtora CARAVELA, Ltd.ª XXXVIII
Fábrica Portugal III

G

General Electric Portuguesa XXVI

H

Henriques & Castro, Ltd.ª XI

I

INEL XIX

J

Pág.

Jayme da Costa, Lda. XXXI
J. B. Fernandes & C.ª, Lda. XXXII
J. J. Gonçalves, Sucrs. XLIV

L

Leacock (Lisboa), Ltd.ª XV

M

Manil XXXIX
Máquinas de Precisão, Ltd.ª XLVII
Metalexport XVIII

N

Nordberg XL

P

P. Bellasi XVI
Papelaria Fernandes XXIII

S

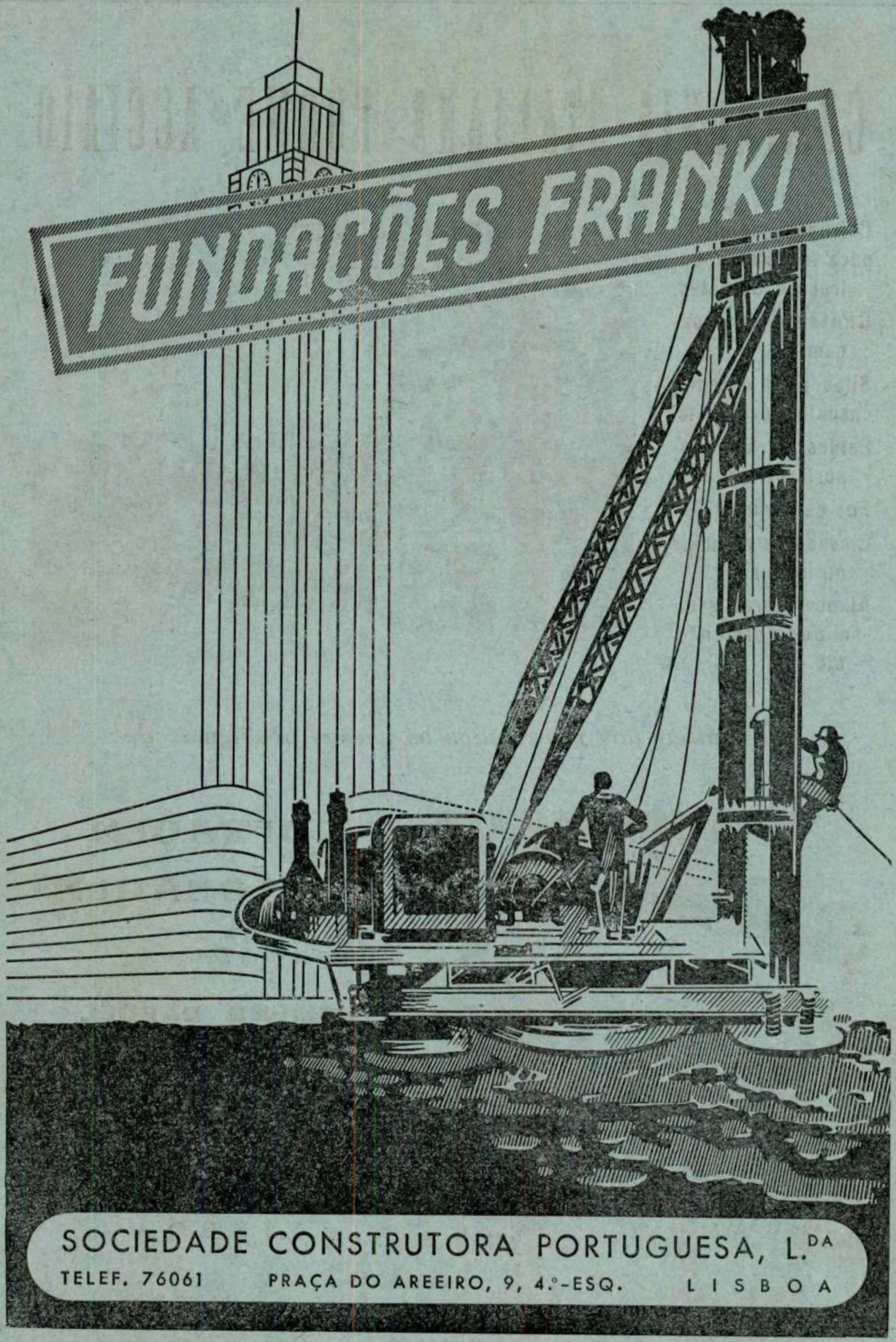
Saint-Gobain XXXII
S. E. Moniz da Maia & Vaz Guedes, L.da XVII
SKF XXXIX
SMEIA . . . . . IX, XLII e XLV
Sociedade Comercial Luso-Columbia XLVI
Sociedade Construtora Portuguesa, Ltd.ª I
Sociedade de Electricidade Brown Boveri . . . . . 4.ª da capa
Sociedade Ericsson de Portugal, Ltd.ª XLIII
Sociedade Fabril de Matérias Plásticas XXVIII
Sociedade Permutadora XLVI
Sociedade Portuguesa Cavan . . . . 2.ª da capa
Sociedade Técnica de Fomento, Ltd. XXXIV
Socotel V
SONAP XXX
Sondagens Ródio, Ltd.ª XIII
SOMEC X
SOMIPA XXVII
SOPECATE . . . . . .
Sorefame XXXIII
Standard Eléctrica VII

T

The Engineering Company of Portugal, Ltd. XXI

U

União Eléctrica Portuguesa . . . . . 2.ª da capa


FUNDAÇÕES FRANKI
SOCIEDADE CONSTRUTORA PORTUGUESA, L.DA
TELEF. 76061
PRAÇA DO AREEIRO, 9, 4.º-ESQ.
LISBOA

COMPAGNIA ITALIANA FORME ACCIAIO

Cofragens metálicas para todas as construções de betão.

Centrais de dosagem.

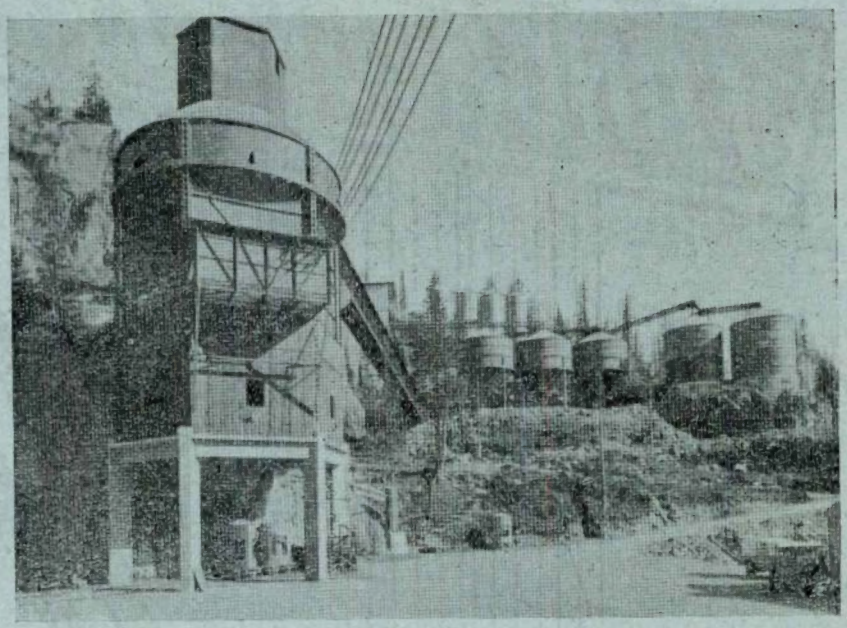
Silos para cimento, cascalho, areia, etc.

Baldes para transporte de betão.

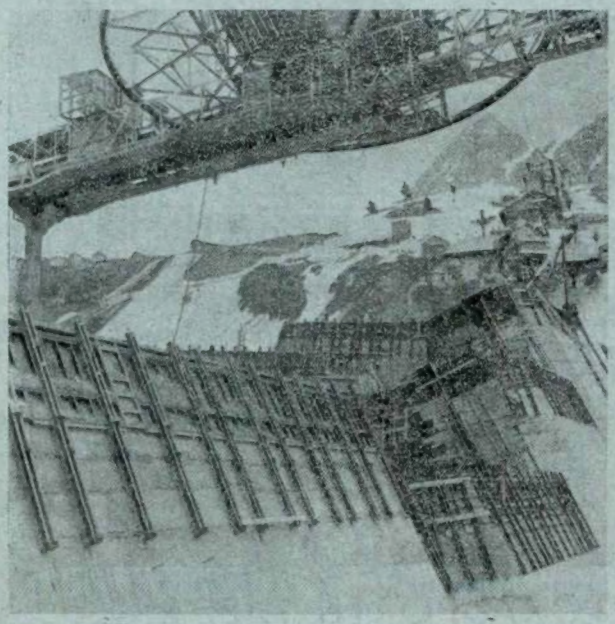
Pés de carneiro.

Elevadores verticais ou inclinados.

Alimentadores sem-fim para cimento, etc.



Consultem-nos para todos os vossos problemas de:



COFRAGEM E BETONAGEM

Agente Exclusivo:

EDMOND DARDEL

Engenheiro-consultor

RUA RODRIGUES SAMPAIO, 19-4.º B

Telefone 42289

LISBOA

Fábrica Portugal

S. A. R. L.

LISBOA

MOBILIÁRIO METÁLICO

EM TODOS OS GÉNEROS

Instalações completas para :

Mobiliário moderno
para

ESCRITÓRIOS
ESCOLAS
BIBLIOTECAS

CLINICAS
HOSPITAIS
SANATÓRIOS
CINEMAS
HOTÉIS
ESPLANADAS

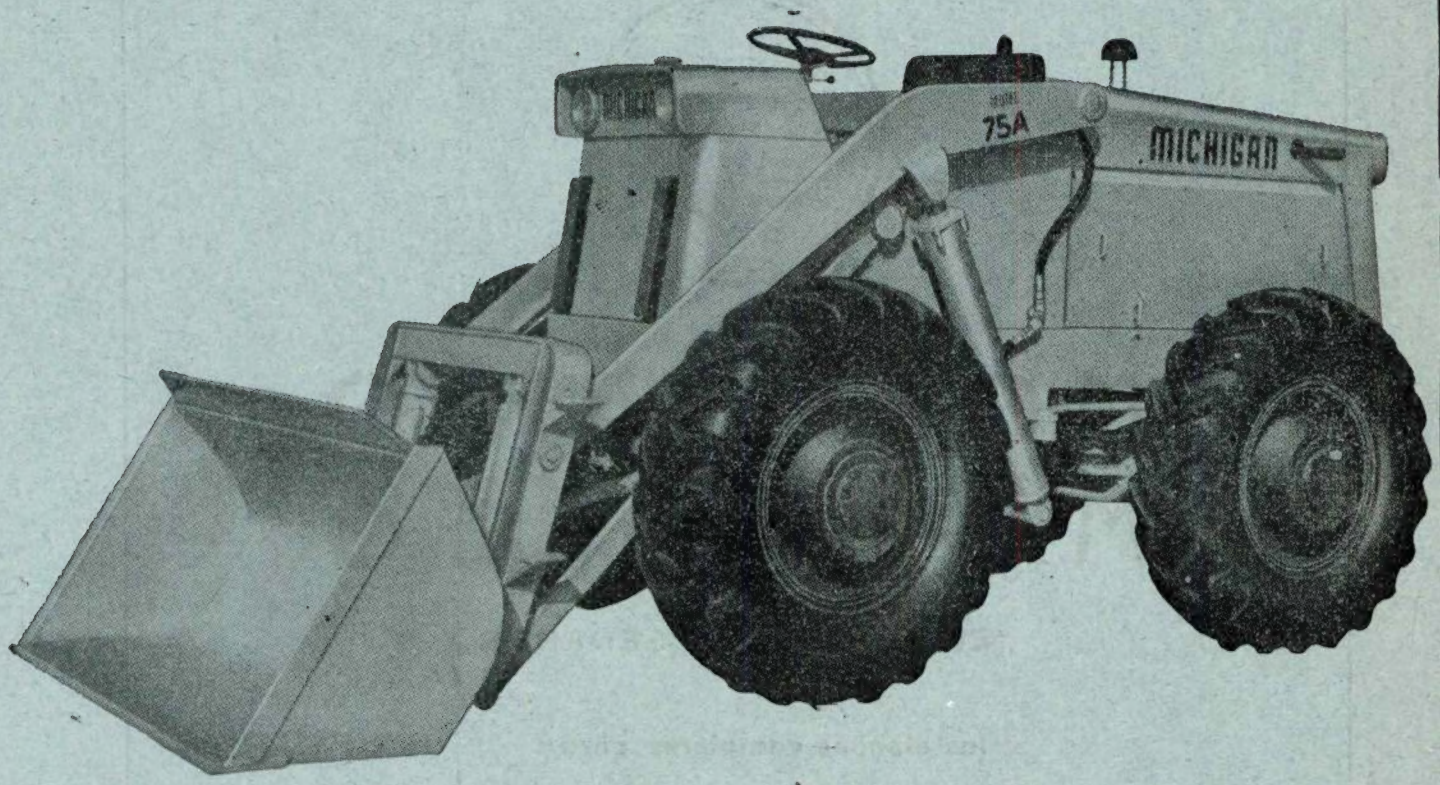
SALAS DE EXPOSIÇÕES :

Rua Febo Moniz, 2 a 20 — Praça dos Restauradores, 49 a 57

Avenidas da República e Elias Garcia — Rua da Graça, 82 e 84

tracto-carregador

CLARK
MIGHIGAN
U.S.A.



Mais «EXTRAS» são «STANDARD» no MICHIGAN do que em qualquer outro tracto-carregador.

- DOIS FARÓIS DIANTEIROS PLENOS DE LUZ
- MUDANÇAS DE TRANSMISSÃO SEMI-AUTOMÁTICAS
- CONVERSOR DE BINÁRIO — NÃO TEM EMBRAIAGEM
- MOVIMENTO DE BALDE INDEPENDENTE DA LANÇA
- CONTA HORAS DO MOTOR
- FILTROS DE ÓLEO PARA O MOTOR E CONVERSOR
- DOIS FARÓIS TRASEIROS
- DIRECÇÃO COM AJUDA HIDRÁULICA
- DESMULTIPLICAÇÃO NOS CUBOS DAS RODAS
- INDICADOR DA POSIÇÃO DO BALDE

Motor Diesel 80 CV. — Duas velocidades de trabalho e duas de marcha, quer para a frente quer para trás — direcção às rodas traseiras — todas as rodas motoras — pneus 14 : 00 × 24 tipo terraplanagem — balde de 1 jarda cúbica, etc., etc.
Tudo isto torna o Michigan no campião de todos os tracto-carregadores de rodas ou de lagartas.

DISTRIBUIDORES EXCLUSIVOS :

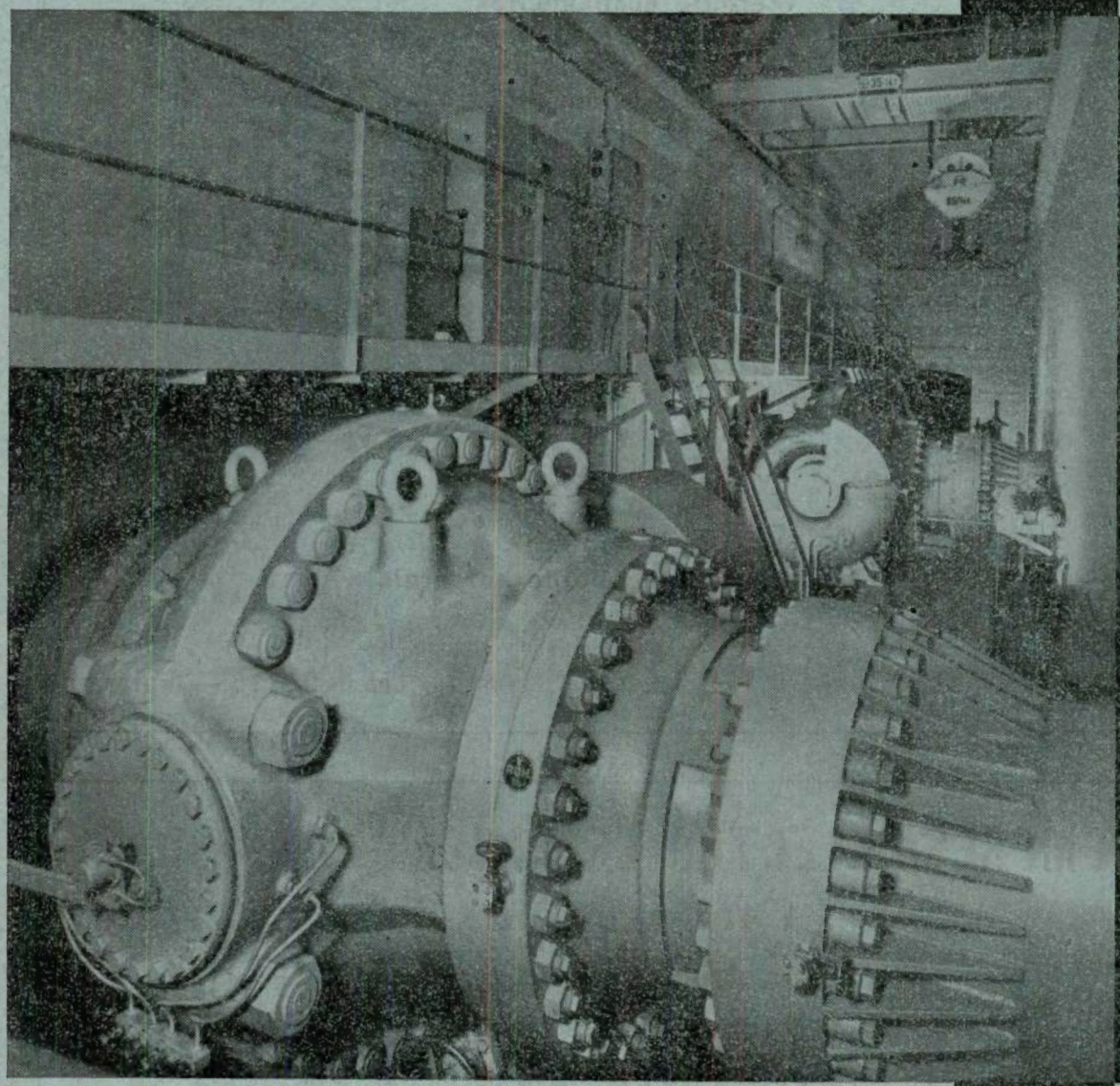
BLACKWOOD HODGE

BLACKWOOD HODGE (PORTUGAL) LDA

AV. ALMIRANTE REIS, 247 — LISBOA

Telef. 72 59 48 - 72 59 84

Equipamentos para Centrais Hidroelectricas



Casa das válvulas com válvulas esféricas funcionando como obturadores de turbinas, numa central hidroelectrica suiça

DE ROLL

Société des Usines de
Louis de Roll S.A., Fábricas em
Gerlafingen, Klus, Choindez,
Rondez, Olten, Berne (Suiça)

Representantes em Portugal:
Socotel, Lda.
Rua Sá da Bandeira, 651-4°. Esc
Porto — Telef. 27013

Instalações completas para barragens; guindastes, guinchos e pontes rolantes; máquinas para limpesa das grades de retenção; comportas de todos os tipos; órgãos de obturação para condutas forçadas: válvulas esféricas com comando por êmbolos giratórios, válvulas-borboleta, válvulas de cunha, válvulas de gaveta anular para regulação de caudais, válvulas automáticas de segurança em caso de ruptura das condutas, válvulas de descarga de fundo; funiculares e teleféricos para o transporte de pessoas e mercadorias; máquinas de estaleiro para a construção de barragens: transportadores, britadores, crivos seleccionadores vibradores, lavadores; betoneiras; projecto de instalações completas de transporte, britagem, crivagem e lavagem.

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 2 0464 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

EMPRESA ELECTRO CERÂMICA — S. A. R. L.

Candal — Gaia

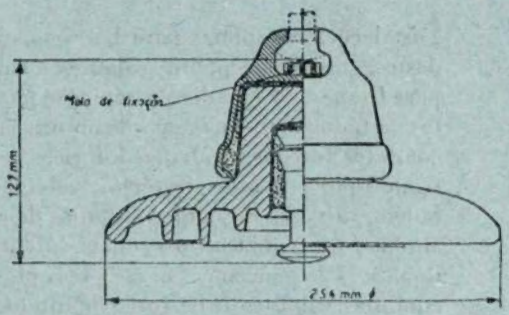
ISOLADORES DE CADEIA

Para suspensão

Tipo ACS 25

Este isolador é igual ao tipo I. B. S. 99 da firma inglesa Taylor Tunnicliff & Co., Ltd., por acordo com a qual o fabricamos

Peso aproximado: 4,3 kg cada elemento



Materiais

Porcelana vidrada em castanho.
Campânulas de ferro fundido maleável, galvanizadas por imersão a quente.
Hastes de aço macio galvanizadas por imersão a quente.
Molas de fixação de bronze fosforoso.

Sede — Largo Barão de Quintela, 3 - LISBOA

Standard Electrica, S.A.R.L.

ASSOCIADA DA

"INTERNATIONAL TELEPHONE & TELEGRAPH CORPORATION"

NOVA YORK

PROJECTOS · FORNECIMENTOS · INSTALAÇÕES

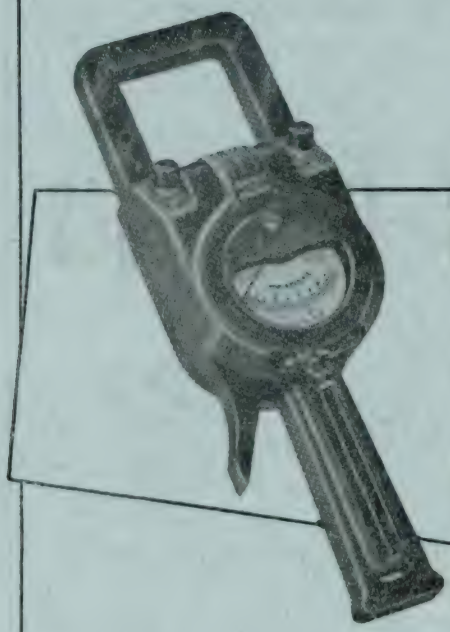
- Instalações de comutação telefónica, manuais e automáticas, de todos os sistemas e capacidades. Sistemas de comunicações por fios em altas frequências;
- Materiais de transmissão automática, por fios e por rádio;
- Material de rádiocomunicações para todas as aplicações em média, alta, muito alta, e ultra-alta frequência;
- Sistemas de antenas para aplicações gerais e especiais para rádiocomunicações, rádiodifusão e televisão;
- Equipamentos de rádiodifusão e televisão e respectivo material de estúdio e acessórios;
- Sistemas de sinalização e de comando, automáticos e manuais, intercomunicadores, amplificadores e aparelhagem acessória;
- Cabos e acessórios de todos os tipos, para energia, comunicações e altas frequências;
- Rectificadores de selénio de tipos especiais e gerais para todas as aplicações.

SERVIÇOS TÉCNICOS, COMERCIAIS E FÁBRICA

AV. DA INDIA LISBOA

TELEFONES 63 8171/6

PINÇAS FERRANTI



PINÇAS VOLT—AMPERIMÉTRICAS

7 ESCALAS

EM AMPÈRES	EM VOLTS
0 – 10 AMPS.	0 – 150 V
0 – 25 »	0 – 600 »
0 – 100 »	
0 – 250 »	
0 – 1000 »	

PINÇA WATTIMÉTRICA

7 ESCALAS

0 – 3 KW
0 – 6 »
0 – 12 »
0 – 30 »
0 – 60 »
0 – 120 »
0 – 300 »

REPRESENTANTES:

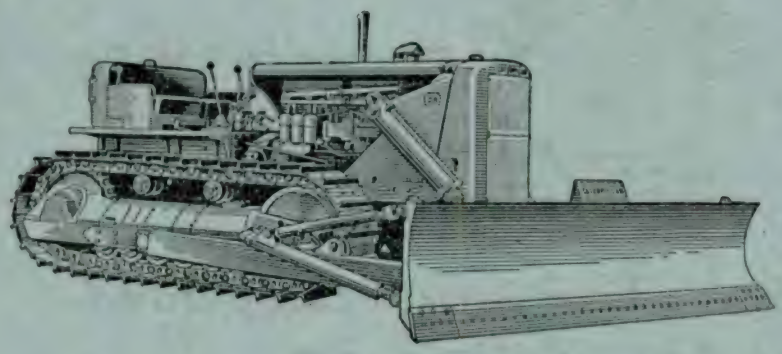
C. SANTOS LDA.

29, AVENIDA DA LIBERDADE, 41 — LISBOA

DIVISÃO MARÍTIMA E TÉCNICA
T. DA GLÓRIA, 17—LISBOA
160, R. STA. CATARINA, 168—PORTO

CATERPILLAR*

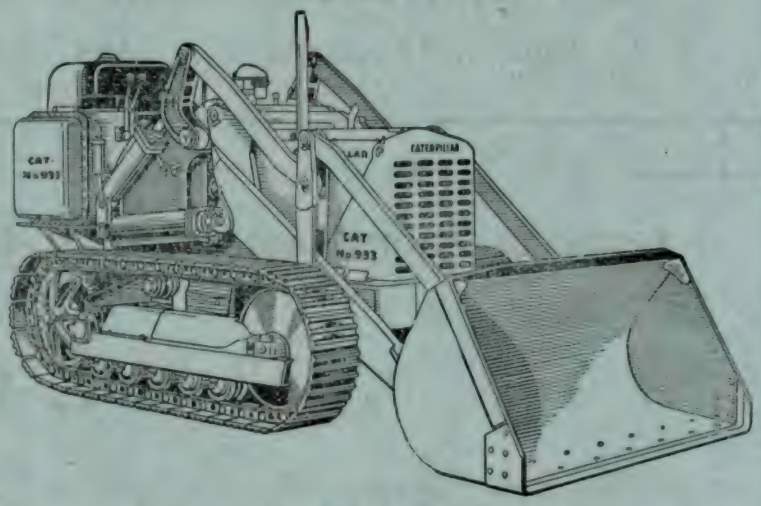
MARCA REGISTADA



TRACTOR COM LÂMINA BULLDOZER

A marca de alta qualidade que tem ajudado a construir no Continente, Ilhas e Ultramar Português todas as grandes barragens, estradas e aeroportos

Informe-se junto dos possuidores de máquinas e equipamentos Caterpillar* sobre a qualidade do material, as despesas de conservação e manutenção, o rendimento e a assistência prestada pelo agente exclusivo



PÁ ESCAVADORA CARREGADORA

SMEIA

Sociedade de Mecanização Industrial e Agrícola

S. A. R. L.

LISBOA — Avenida Padre Manuel da Nóbrega, 8-B — Telef. 72 40 53

* CATERPILLAR e CAT são marcas registadas.

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

Fábrica com quatro linhas de fabrico

sendo uma delas das mais modernas da Europa

Para obras hidráulicas e de responsabilidade preferir o

CIMENTO TEJO

Companhia «Cimento Tejo»

Rua da Vitória, 88-2.º — Telef. 28953 — LISBOA

Sociedade Metropolitana e Colonial de Construções, L.da

SOMEC

R. Andrade Corvo, 29, 1.º — Lisboa Telefone 32795/6

Sondagens

Fundações

Betão armado

Trabalhos marítimos

Túneis

no Continente e Ultramar

PISCINA DO HOTEL ATLÂNTICO
ESTORIL

PETRIFICANTE E HIDRÓFUGO

À BASE DE CIMENTO

CEMPEXO

PISCINA EM CARCAVELOS

PINTURAS

DISTRIBUIDORES EM PORTUGAL

HENRIQUES & CASTRO, Lda.

AVENIDA CONDE DE VALBOM, 96 LISBOA

TELEF. 77 50 57 - 77 50 58

SILO NO REDONDO
Para o Ex.mo Sr. José Martins da Silva
Capacidade 100.000 kg de trigo
Execução com moldes deslizantes, sistema «PROMETO»

Construções Técnicas, L.da

Praça do Município, 13, 3.º

LISBOA — Telefones 22344 e 27809

Fundações

Construções Civis e Industriais

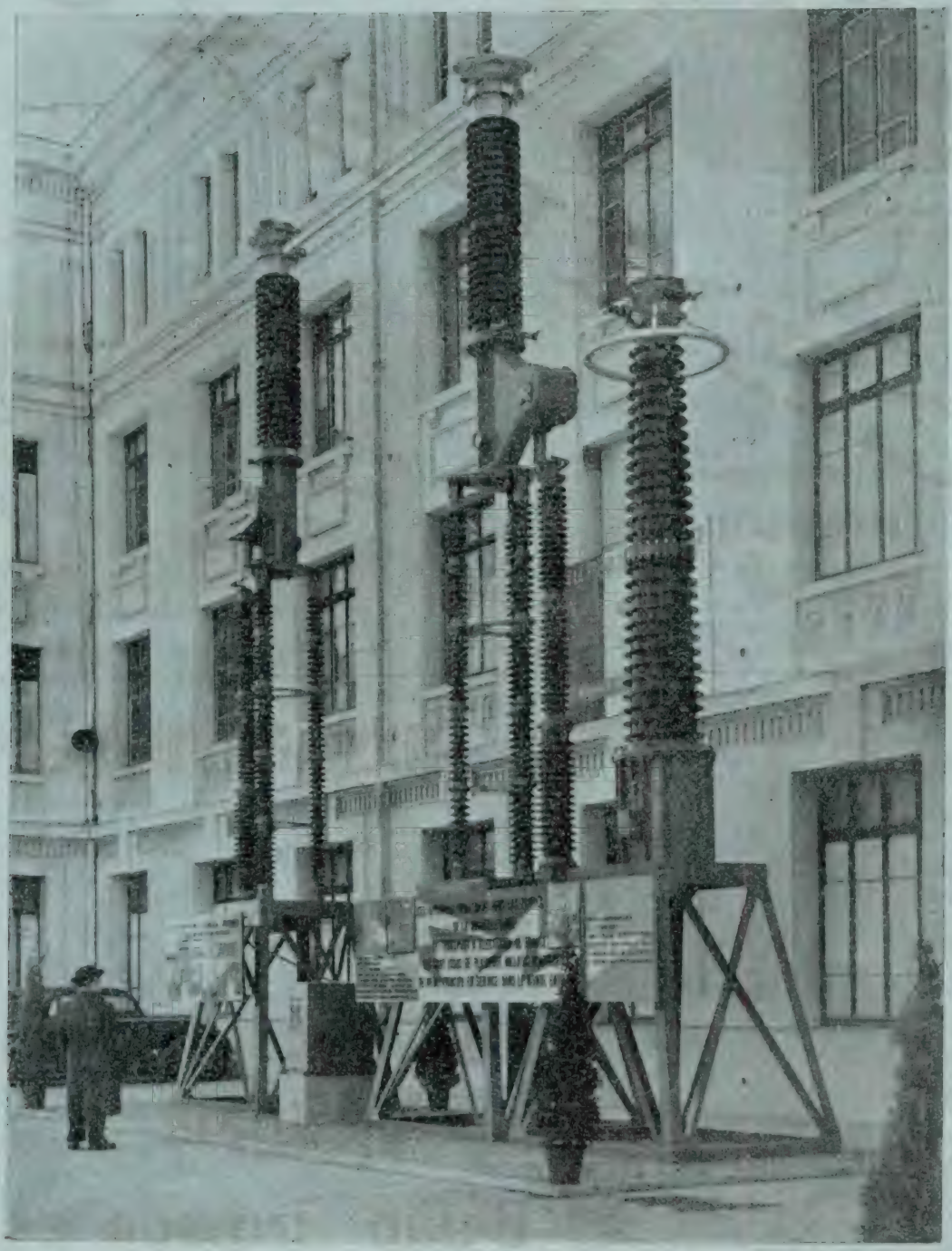
Betão Armado e Betão Pré-esforçado

Obras Públicas

DELLE

Ateliers de Constructions Electriques de la Compagnie Génerales d'Electricité

PARIS

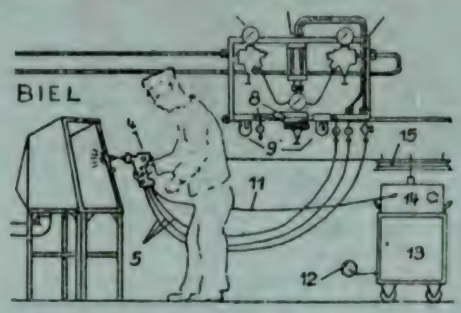


Disjuntores Ortojectores «Delle» 420 000 Volts

DELEGADOS

AGÊNCIA GERAL DE MATERIAL ELÉCTRICO, L.DA

Rua dos Industriais, 4-1.º (às Côrtes) LISBOA Telefs. 66 06 92 / 66 60 82 / 66 06 04



METALIZAÇÃO «BIEL»

Aparelhagem tècnicamente perfeita

FABRICO ALEMÃO

Arames de aço e metais

PROJECTOS E ORÇAMENTOS GRÁTIS

DISTRIBUIDORES:

AGÊNCIA COMERCIAL, LDA.

LISBOA

Rua da Boa Vista, 76-1.º — Telef. 34759

SONDAGENS
FUNDAÇÕES
CAPTAÇÕES DE ÁGUA
REBAIXAMENTOS
DE NÍVEIS AQUÍFEROS

RUA RODRIGO DA FONSECA, 62-4.º D. · LISBOA · TELEF. 53873

TEMPERATURA, PRESSÃO E DÉBITOS
PARA VAPOR, ÁGUA, AR, ÓLEO E OUTROS FLUIDOS

BOUHON & IRMÃO, LTD.

EM LISBOA: Av. Júlio Diniz, 26, r/c Esq.
Telef.: 77 36 03, 77 86 85
NO PORTO: Rua Antero do Quental, 615
Telef. 4 0118 — 4 0119

SONDAGENS RÓDIO, L.DA

LISBOA

RUA S. MAMEDE AO CALDAS, 22, 3.º

Telefones: **2 8685 - 2 6865** ✦ Telegramas: **SETANSOL**

RODIO

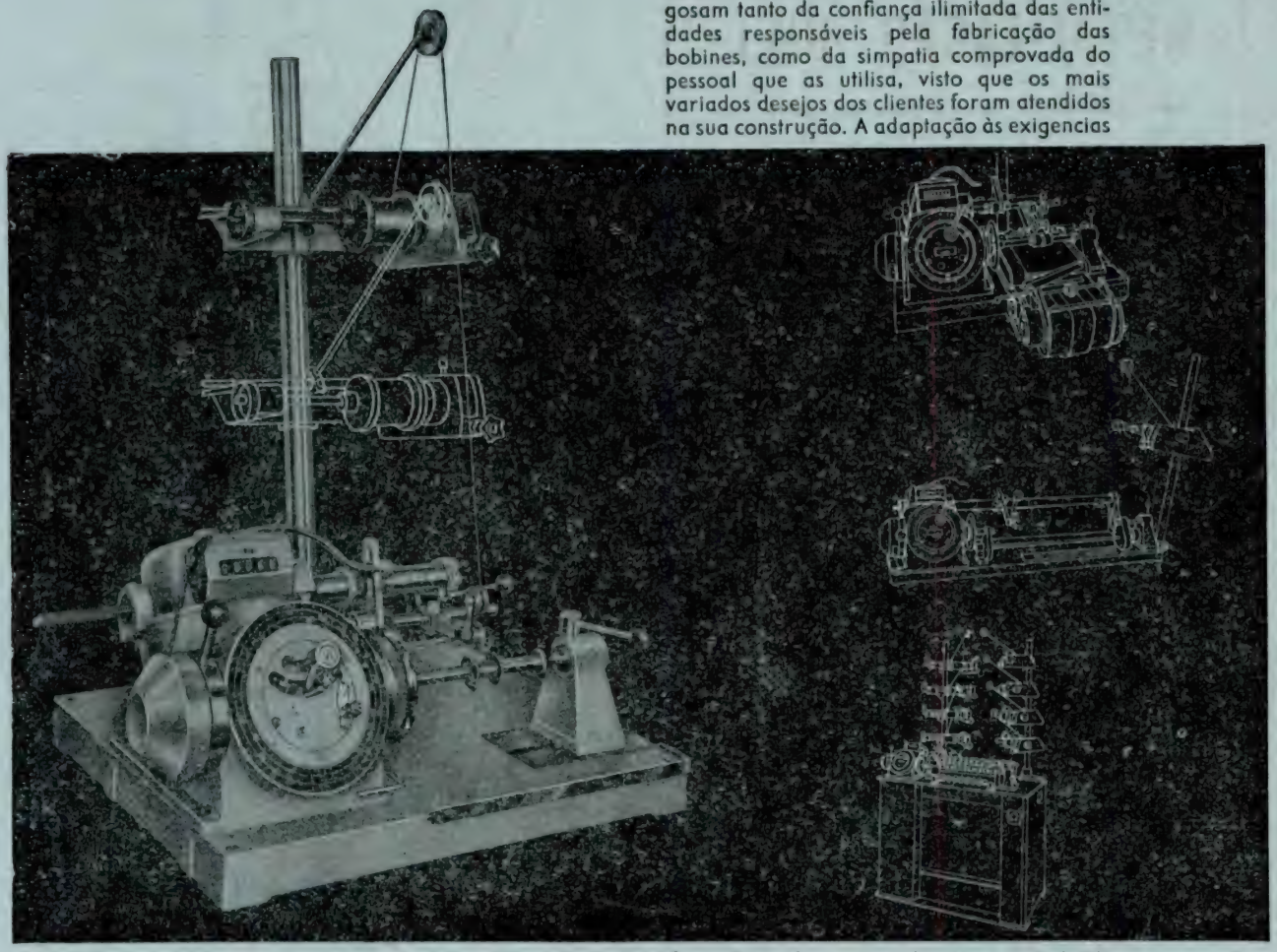
SONDAGENS GEOLÓGICAS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
ESTACAS GUNITA
CAPTAÇÃO DE ÁGUAS
CONGELAÇÃO DO TERRENO
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS HIDRÁULICAS
CONSOLIDAÇÃO DE FUNDAÇÕES
ABAIXAMENTO DO LENÇOL DE ÁGUA

—//—

Sócio gerente: **Walter Weyermann**-Eng. civil

Máquinas de bobinar fio fino

40 anos de experiência na construção das máquinas de bobinar fio fino justificam a capacidade de producção e a precisão extraordinárias da nova série tipo OFA. Durante 40 anos as exigencias sempre crescentes e complexas exigidas das máquinas de bobinar foram satisfeitas. As máquinas do tipo OFA gosam tanto da confiança ilimitada das entidades responsáveis pela fabricação das bobines, como da simpatia comprovada do pessoal que as utilisa, visto que os mais variados desejos dos clientes foram atendidos na sua construção. A adaptação às exigencias



da prática vê-se especialmente no modo de construção. Este permite a transformação ulterior do modêlo estandardisado em qualquer máquina de producção desejado, que da forma mais racional enrola bobinas de relés, de alto-falantes, de excitatrizes, de relés telefónicos, de alumagem, etc. Os nossos engenheiros especialisados neste domínio estão com a grande experiencia que possuem sempre à sua disposição. Milhares de máquinas de bobinar Micafil funcionam diáriamente em todos os continentes dando a maior satisfação a quém as possue.

MICAFIL S.A. ZURICH (Suiça)

Representação em Portugal:

Edouard Dalphin, ing., Porto

Rua Sà da Bandeira No 481-2°-D° (Palacio do Comercio)

MICAFIL

LEACOCK (LISBOA), L.DA

AV. 24 DE JULHO, 16 — LISBOA

R. JOSÉ FALCÃO, 185 — PORTO

SECÇÃO DE MÁQUINAS E ELECTRICIDADE

REPRESENTANTES DE:

THE RAWLPLUG COMPANY, LTD.
Material de fixação para construção civil e mecânica.

HOOVER, LTD.
Motores eléctricos desde 1/8 até 3/4 H. P., Monofásicos e Trifásicos.

J. A. CRABTREE & CO. LTD.
Material para instalações de luz: interruptores, fichas, tomadas, etc.
Material para instalações de força: arrancadores, disjuntores, caixas, etc.

TRANSFORMERS & WELDERS, LTD.
Transformadores de todos os tipos até à potência de 3000 K. V. A. e até à tensão de 33000 Volts.

BARTON CONDUITS, LTD.
Tubo de aço para instalações electricas.

EDWARD MAC BEAN & CO. LTD.
Tubo, fita e pano de tela envernizada.

MEASURING INSTRUMENTS (PULLIN), LTD.
Amperímetros, Voltímetros, Frequencímetros, Wattímetros de todos os tipos e escalas.

THE AUTOMATIC COIL WINDER AND ELECTRICAL EQUIPMENT CO, LTD.
Osciladores, capacímetros, texts universais, texts electrónicos, analisadores de válvulas, luxímetros, expositores para fotografias.
Máquinas para bobinar e enfitar.

GEORGE KENT
Contadores de água, de vapor e de óleo.
Tubos Venturi
Determinadores e controladores do pH, do CO_2 e pirómetros pelo processo potenciométrico.
Combustiómetros, manómetros, registadores de distâncias, medidores-registadores de caudais, medidores de orifícios em condutas para gases.

THORN ELECTRICAL INDUSTRIES, LTD.
Luz fluorescente e rádios.

ELECTRIC PANELS, LTD.
Aquecimento eléctrico

OERLIKON

Máquinas e aparelhos eléctricos de todo o género

Grupo de alternadores de 13.000 e 6.500 kVA, 750 rot/min. na central de Fätschbach, Glaris (Suíça), da Nordostschweiz Kraftwerke A. G., Baden.

P. BELLASI

Rua Sá da Bandeira, 494-3.º • Telefone 21968 • PORTO

Representante geral para Portugal e Ultramar dos

ATELIERS DE CONSTRUCTION OERLIKON • ZURICH 50 • (SUÍÇA)

TÉCNICA

DIRECTOR: CARLOS MANUEL DE MEDEIROS PORTELA
ADMINISTRADOR: RICARDO MANUEL SIMÕES BAYÃO HORTA

Ano XXXII - N.º 275 Outubro de 1957

C. D. U. 167:37

A INVESTIGAÇÃO E O ENSINO

PELO ENG.º QUÍMICO-INDUSTRIAL LUÍS A. DE ALMEIDA ALVES
Prof. do I. S. T.

A revista *Chemical and Engineering News* publicou em 8 de Abril de 1957 um número especial dedicado ao problema da colocação dos engenheiros, no qual faz uma análise dos campos de actividades possíveis, traduzidos nos seguintes títulos:

O Químico da Investigação Industrial.
O Químico da Produção.
O Engenheiro da Investigação Industrial.
O Químico Analítico Industrial.
O Vendedor Técnico.
O Engenheiro de Projecto.
O Homem de Negócios com preparação química.

Sobre cada um destes tipos, vamos transcrever algumas frases da revista:

. . . . . .

« . . . . os investigadores industriais devem ter um domínio sólido dos fundamentos da sua ciência e a capacidade de aplicação dos seus conhecimentos à solução dos problemas correntes . . . »

. . . . . .

«A preparação de Engenharia Química que o químico da produção recebe na Escola não lhe dá todos os elementos que tem de ter para as suas funções. De facto, apenas tem possibilidade de aplicar os princípios básicos de Engenharia que aprendeu.»

. . . . . .

«As Companhias levam a efeito a pesquisa industrial para realizar ou aumentar os seus lucros e a pesquisa industrial dentro de uma única Indústria pode lançar mão com vantagem da maior parte das ciências.»

. . . . . .

« . . . . o químico analítico industrial está numa posição chave para fornecer informações quer no campo técnico quer administrativo da sua Companhia. A variedade dos problemas encontrados pelo químico analítico industrial exige um largo treino científico. Uma vez no trabalho industrial, tem possibilidade de aperfeiçoar técnicas especiais relacionadas com os produtos, projectos e processos da sua Companhia.»

. . . . . .

«O trabalho (do vendedor técnico) exige não só uma sólida preparação escolar e um conheci-

mento dos produtos com que tem de tratar, mas também um largo conhecimento das indústrias consumidoras, incluindo os seus produtos, processos e problemas.»

. . . . . .

«O engenheiro de projecto deve estar sòlidamente apoiado nas operações unitárias. Deve ter um domínio seguro de Termodinâmica e de Química-Física. Este domínio, aliado a alguns conhecimentos de Química Industrial, prepara-o para o trabalho de projecto numa grande variedade de indústrias.»

. . . . . .

«Os rápidos progressos tecnológicos criaram a necessidade de haver pessoas treinadas cientìficamente não só no laboratório e nas fábricas mas também nos escritórios de negócios. Cada vez mais os cientistas são necessários em funções que transcendem a ciência em si, na rudeza da indústria competitiva.»

. . . . . .

Aparece assim, como denominador comum de todas as actividades da Engenharia Química, a preparação científica de base, à qual há que atribuir no entanto, um significado preciso, sem o que se pode correr o risco de chegar a conclusões de aplicação limitada, por formulação deficiente dos dados de partida.

* * *

Embora sujeito a algumas excepções em casos especiais, pode admitir-se a existência do seguinte postulado fundamental:

O progresso da técnica moderna resulta do conhecimento cada vez mais perfeito dos fenómenos físico-químicos.

E em consequência, infere-se imediatamente o seguinte corolário:

A preparação científica de base tem de incidir sobre o conhecimento exacto dos fenómenos físico-químicos.

Fundamentalmente a interpretação dos fenómenos que interessam à Engenharia, converge nos seguintes cinco pontos principais:

1) Comportamento dos meios elásticos.
2) Propriedades críticas dos gases.
3) Energia livre das transformações.
4) Electromagnetismo nas descontinuidades.
5) Energia das ondas electromagnéticas.

O comportamento dos meios elásticos, enquadrado na sua maior generalidade, nos princípios da Reologia, reveste-se de uma unidade teórica de conjunto, que permite estabelecer uma série progressiva de tipos, cujos extremos são a deformação elástica hookeana e o movimento viscoso newtoniano. Desta maneira, a identidade de significado entre a viscosidade e o módulo de elasticidade transversal, leva a estruturar lògicamente a teoria dos movimentos plasto-elásticos e visco-elásticos (ou dos plasto-inelásticos e visco-inelásticos), cuja importância na investigação técnica é cada vez maior.

Simplesmente, o problema do comportamento elástico apenas exprime relações entre forças mecânicas e deformações e pressupõe portanto, como caso mais simples, que não existam simultâneamente transformações físico-químicas. E estas vão buscar o seu tratamento quantitativo aos conceitos de condições críticas e de energia livre.

A definição das condições críticas permite uniformizar o estudo dos gases reais, pela introdução nos cálculos, do coeficiente de compressibilidade; e este facto tem um interesse crescente à medida que se desenvolvem e ampliam as técnicas de alta pressão. Por outro lado, num aspecto meramente intrínseco as condições críticas podem abrir o caminho, na previsão teórica dos valores de determinadas constantes, cuja correlação com as propriedades fundamentais interessa conhecer.

A relação existente entre a variação de energia livre e a constante de equilíbrio fornece um método universal de estudo das transformações físico-químicas, com as suas repercussões ilimitadas na Mecânica Química e nos equilíbrios de fases.

Acontece porém que no equilíbrio de fases, a heterogeneidade dos sistemas pode obrigar a conhecer mais de perto o mecanismo de contacto, o que implica uma análise dos fenómenos electro-magnéticos junto às superfícies de separação. Deste modo, ficam estabelecidas as bases teóricas para a investigação em campos de interesse crescente na Técnica moderna, relacionados com a adsorpção, a permuta de iões, as soluções coloidais e o comportamento dos agentes tensioactivos.

Deve notar-se ainda que as esquematizações feitas com base nos princípios da Termodinâmica e do Electromagnetismo, começam a deixar de ser válidas quando se desce abaixo da escala molecular. Daí a necessidade de introduzir o conceito de onda electromagnética, cuja potencialidade se revelou imprescindível na estruturação da Electrónica e da Física Nuclear.

Não basta porém o conhecimento dos conceitos para os tornar instrumentos úteis no «manuseamento» da realidade física; há que revesti-los ainda dum suporte numérico adequado, indispensável ao tratamento quantitativo dos fenómenos que se destinam a interpretar. E neste processo de elaboração numérica da interpretação do mundo físico, reside o problema mais agudo da formação geral requerida para as actividades da Engenharia Moderna.

* * *

Tomemos então como pontos de partida, as bases que se podem formular em consequência das considerações anteriores:

1) A criação dos conceitos interpretativos.
2) O tratamento numérico desses conceitos.

O primeiro define a «forma» de ataque dos problemas e o segundo traduz a «disciplina» no campo das aplicações. E como o objectivo a atingir é a «explicação» real dos fenómenos a «investigar», pode concluir-se que é da sua conjugação adequada que resultam as condições fundamentais da investigação.

Simplesmente o campo de validade dos conceitos e em particular, a capacidade de previsão dos esquemas matemáticos em que são enquadrados são sempre mais ou menos limitados e por isso, a investigação não pode prescindir do contacto permanente com a realidade física, por intermédio dos pontos de referência fornecidos pela experimentação.

Não se pode esquecer porém que a experimentação, embora seja em si, uma actividade de carácter estatístico nas suas consequências, tem de ser sujeita também a uma disciplina própria, cujas rotinas suficientemente definidas, tornem possível de uma maneira sistemática, a reprodutibilidade dos resultados. Por outras palavras, os resultados da experimentação têm de andar vinculados a formas definidas de exactidão e de rendimento, sem o que se pode perder a sua acção preponderante, como ponto de apoio fundamental na estrutura da investigação.

Mas quando se passa da previsão teórica para a concretização experimental, surge um factor novo a impor-se como condição «sine-qua-non» nos objectivos a atingir — a medição das variáveis que entram em jogo — o qual arrasta consigo um complexo problema de aparelhagem e de técnica de execução.

A interpretação, o *cálculo* e a *medida* aparecem portanto como os três grandes pilares da investigação. No entanto, a sua acção isolada é pràticamente inoperante, porque cada resultado num determinado sector tem de ser analisado à luz dos restantes, afim de que as conclusões sejam consistentes no seu conjunto e constituam de facto, um passo em frente, que permita alicerçar com segurança, as fases seguintes da estruturação genérica do trabalho a realizar.

E é nesta interligação de conjunto que reside a grande dificuldade da investigação.

* * *

Passando agora da investigação para o investigador, podem estabelecer-se as qualidades psicológicas que têm de existir como reflexo das características básicas da investigação e que são a *prof ndidade,* a *exactidão* e a *imparcialidade.*

Nessas condições, pode concluir-se imediatamente que a função do Ensino, na preparação para a investigação, consiste precisamente em desenvolver essas qualidades.

Mas analisada friamente, esta conclusão é destituída de interesse. Com efeito, profundidade, exactidão e imparcialidade são as qualidades fundamentais de toda a preparação técnica; e sendo assim pode chegar-se ao colorário aparentemente absurdo, de que a investigação não exige uma preparação especial.

O corolário não é verdadeiro apenas pelo seguinte: Na técnica executiva, essas qualidades têm de se exercer no domínio do *conhecido*; na investigação, no domínio do *desconhecido*. E em consequência, há que analisar qual a diferença que daí resulta.

Não se pode falar em maior ou menor apuramento dessas qualidades, porque como qualidades intrínsecas que são, ou existem ou não existem, não tendo pois significado orientar a preparação com vista a um dado grau de desenvolvimento. A diferença reside apenas na maior «polarização» de espírito que é requerida pela investigação, ou por outras palavras, pela delimitação mais apertada do domínio em que tem de ser efectuada.

Quere dizer portanto que a investigação tem de ser exercida sobre problemas circunscritos, em relação aos quais é necessário ultrapassar os conhecimentos presentes. Deste modo, a investigação num dado domínio pressupõe o estudo completo dos respectivos conhecimentos actuais, ou o que é o mesmo, a *especialização* profunda nesse domínio.

Para fazer investigação é necessário haver especialização no campo a investigar e nesse aspecto, o Ensino não pode ter qualquer interferência (1), visto que não pode ser orientado no sentido da especialização. Não quere dizer que não possa suscitar alguns problemas de investigação a título de exemplo, mas fá-lo sempre à custa do tempo a dedicar à preparação geral.

Esses exemplos não são inúteis, mas serão sempre de reduzida projecção na vida profissional se o Ensino técnico não fôr sempre norteado de acordo com objectivos fundamentais atrás enunciados. E se é verdade que a Técnica executiva não se improvisa, por maioria de razão a investigação também não se pode improvisar.

E não se pode improvisar, nem mesmo constituir um sector independente do ensino. A investigação, destinada a efectuar o prolongamento da Ciência actual em cada campo de actividade, não pode ter como função específica mais do que actuar sobre as variáveis que intervêm nos fenómenos e sistematizar de uma maneira exacta as conclusões resultantes. E para tanto, há que utilizar com plena consciência, a formação geral recebida.

O processo não é simples, não facilita a missão das escolas de Engenharia, mas constitui o único caminho para que a investigação se generalise, e possa dar às diversas Indústrias aquele apoio permanente de que depende o seu progresso e o seu desenvolvimento.

---

(1) Abstraindo evidentemente dos cursos complementares levados a efeito nas Universidades, dedicados exclusivamente a problemas de investigação.

MAGUE

S. E. MONIZ DA MAIA & VAZ GUEDES, L.DA

Alverca — Portugal

Derrick Eléctrico

Caracteristicas: Alcance máx. 30 m.
Altura máx. 28 m.
Carga máx. 15 Ton.

PROJECTO E FABRICO DE

PONTES ROLANTES

GUINDASTES

GRUAS, DERRICKS E GUINCHOS

APARELHOS DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS

CONSTRUÇÕES METÁLICAS PESADAS

Varsóvia Mokotowska, 49,
POLÓNIA
Endereço Telegráfico:
METALEX — VARSÓVIA

TORNOS AUTOMÁTICOS LONGITUDINAIS BP-U7 E BP-U12

DE ALTA QUALIDADE DA PRODUÇÃO POLACA

Fabrico de pequenas peças perfiladas em grande e média série.

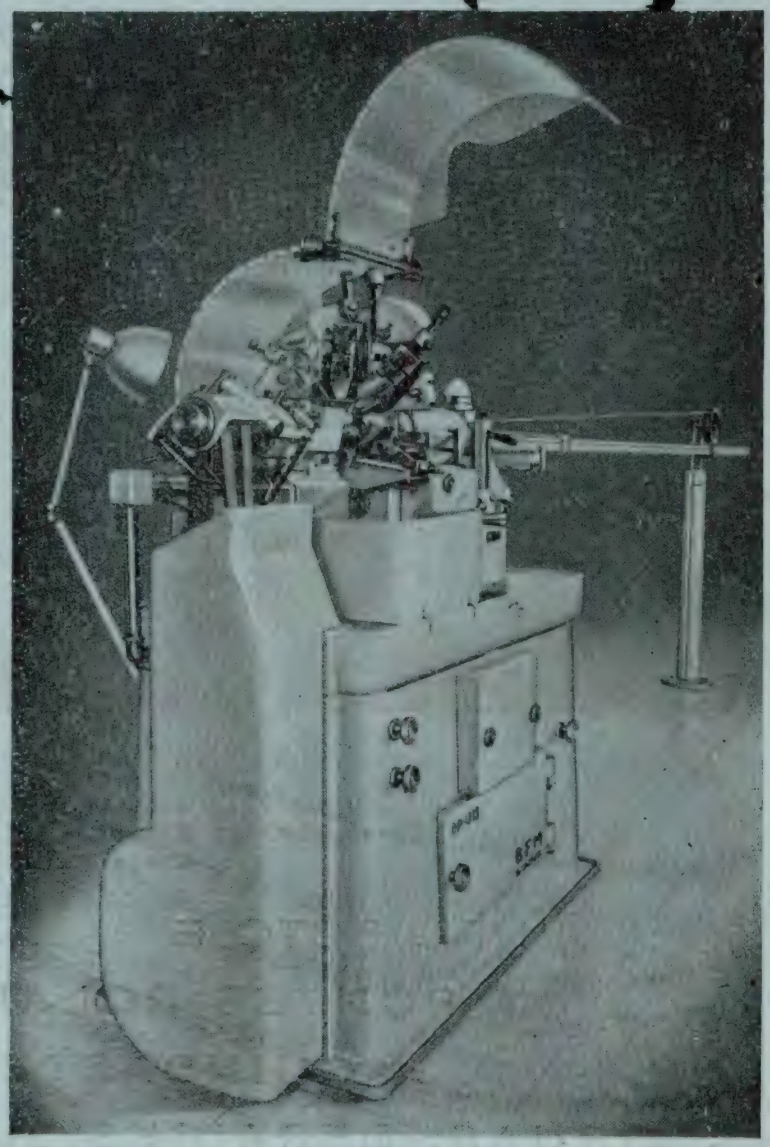
Construção simples, funcionamento impecável.

Extensa gama de rendimento.

Solução muito criteriosa do avanço da barra.

Paragem automática da máquina no termo decurso da barra.

Características:	BP-U7	BP-U12
Diâmetro máximo da barra . .	7 mm	12 mm
Comprimenro máximo de trabalho	70 mm	70 mm
Velocidade da brocha t/min .	200-6000	700-6000
Rendimento peças/min	0.462-24.6	0.076-23
Potência do motor	1 KW	1.7 KW
Peso aproximado	700 kg	1000 kg



PEÇA-NOS PROSPECTOS EXPLICATIVOS

C. D. U. 621 3.09:517.56

Estudo das "séries no tempo" e sua aplicação à determinação da resposta de sistemas lineares de transmissão

PELO ENG.º ELECTR. (I. S. T.) MANUEL JOSÉ DE ABREU FARO
Prof. do I. S. T.
Bolseiro do I. A. C. — Centro de Estudos de Electrónica da C. E. E. N.

Por «séries no tempo» entendemos as séries cujos termos são os valores $f(t_n)$ que a função do tempo $f(t)$ toma nos instantes t_n.

Restringiremos o presente estudo ao caso particular de t_n ser da forma

$$t_n = n\,T_r + t_0 \qquad n = \text{inteiro}$$

isto é, os instantes « t_n » repartem-se uniformemente no tempo com um período de repetição T_r.

Modernamente, este tipo particular de séries tem tido aplicações importantes no domínio das Telecomunicações, constituindo o seu estudo a base teórica da comunicação por impulsos.

Outro aspecto de interesse é a sua aplicação à determinação da resposta de sistemas lineares de transmissão a certa classe de funções. Trata-se dum método de análise e cálculo que, comparado com os métodos clássicos, apresenta em determinadas situações, vantagens que se traduzem por uma maior facilidade e rapidez de conduzir os cálculos.

Começaremos por uma breve revisão dos métodos clássicos de análise focando-se apenas aspectos essenciais e de interesse para a Teoria das Séries no Tempo.

Com os elementos considerados e resultados obtidos estabeleceremos a referida Teoria definindo-se e indicando-se o seu modo de emprego a casos concretos.

As séries no tempo já têm sido objecto de estudo de diversos autores nomeadamente A. Tustin, N. W. Lewis e W. E. Thomson a cujos trabalhos e resultados nos referiremos.

Dado que se trata dum assunto moderno e consequentemente pouco divulgado pensamos que haveria interesse em proceder a um estudo sistemático da questão.

1 — SISTEMAS LINEARES DE TRANSMISSÃO

Tomaremos um quadripolo como modelo dum sistema de transmissão. Trata-se, efectivamente, dum tipo bastante geral que inclui uma larga gama de sistemas utilizados na transmissão de sinais eléctricos e ainda todos os sistemas que, embora destinados à transmissão de sinais de outra natureza, se podem reduzir aos primeiros por analogia.

Consideremos a (Fig. 1) onde se representa um quadripolo o qual se define como sendo um sistema de quatro polos acessíveis, dois polos de entrada e dois de saída e em que as correntes à entrada e à saída satisfazem respectivamente às seguintes condições:

$$i_3 = -i_1$$

$$i_4 = -i_2$$

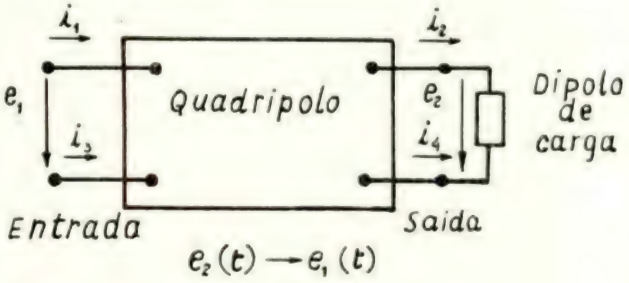


Fig. 1

O quadripolo está terminado por um dipolo de carga ou de serviço, a que corresponde uma impedância $\vec{Z}_s$.

* * *

No que respeita à transmissão de sinais é indiferente falar-se de correntes ou tensões. Tomaremos como base de raciocínio as tensões e, assim, consideramos a tensão $e_2(t)$ como a resposta do quadripolo à tensão aplicada $e_1(t)$. Simbòlicamente representamos o facto por $e_1(t) \rightarrow e_2(t)$.

Convem salientar que a relação entre $e_1(t)$ e $e_2(t)$ depende dum modo geral do quadripolo em si e do dipolo de carga.

(1.1) Definições fundamentais

Começaremos por algumas definições fundamentais:

(1.1.1) **Sistemas lineares**: Um sistema diz-se linear se a resposta a uma combinação linear de funções do tempo for a mesma combinação linear das respostas que se obteriam quando cada uma das funções se aplicasse isoladamente ao sistema.

Isto é, se

$$x_1(t) \rightarrow x_2(t)$$
$$y_1(t) \rightarrow y_2(t)$$

a resposta a

$$z_1(t) = a\,x_1(t) + b\,y_1(t)$$

deverá ser

$$z_2(t) = a\,x_2(t) + b\,y_2(t)$$

Se o sistema for «linear» teremos, portanto,

$$a\,x_1(t) + b\,y_1(t) \rightarrow a\,x_2(t) + b\,y_2(t)$$

(1.1.2) **Realizabilidade física**: Num sistema físicamente realizável a resposta num determinado instante t_1 só depende dos valores que a função de entrada toma no passado de t_1.

Isto é, se

$$x_1(t) \rightarrow x_2(t)$$

$x_2(t)$ dependerá apenas dos valores que $x_1(t)$ toma desde $t = -\infty$ a $t = t_1$.

(1.1.3) **Sistemas invariantes no tempo**: Um sistema diz-se invariante no tempo se a natureza da resposta não depender da origem do tempo.

Isto é, sendo $x_2(t)$ a resposta a $x_1(t)$

$$x_1(t) \rightarrow x_2(t)$$

teremos ainda

$$x_1(t - to) \rightarrow x_2(t - to)$$

2 — DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DUM SISTEMA LINEAR E INVARIANTE EM FUNÇÃO DA RESPOSTA $r_u(t)$ A UM IMPULSO UNITÁRIO.

Utilizando as definições anteriores vamos determinar a resposta dum sistema linear e invariante a uma dada função do tempo $s_1(t)$.

A função $s_1(t)$ pode ser aproximada por uma sucessão de impulsos contiguos de amplitude $s_1(\tau)$ e duração $\delta\tau$ em que $\delta\tau \rightarrow 0$ (Fig. 2).

Por definição de sistema linear a resposta a $s_1(t)$ será o somatório das respostas individuais a cada um dos impulsos elementares.

Vamos determinar essas respostas em função da resposta a um impulso unitário.

Por impulso unitário entenderemos um impulso de duração, T, infinitesimal e cuja amplitude, E, é uma grandeza infinitamente grande da ordem do inverso da duração.

E e T satisfazem à seguinte condição $\lim_{T \to 0} E\,T = 1$

Na presente definição restringimo-nos a impulsos unitários rectangulares, podia-se dar uma definição mais geral que não interessa considerar aqui.

Um impulso unitário rectangular será, por exemplo, um impulso em que

$$E = K \frac{1}{\partial \tau}$$

$$T = \partial \tau$$

$$\partial t \to 0$$

$$K = \text{const.}^{e} = 1 \text{ [volt . seg]}$$

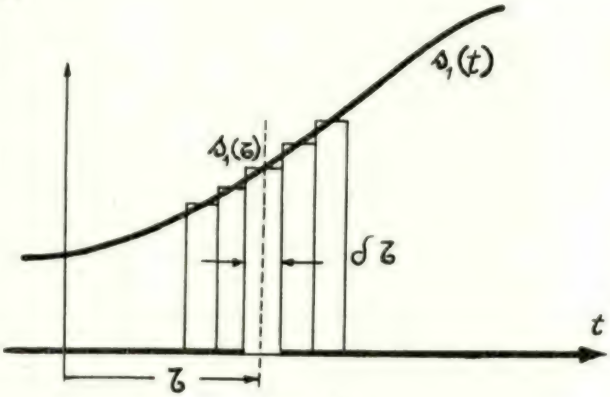


Fig. 2

K é uma constante que se introduziu com o fim de preservar as dimensões físicas e assinalar o facto de que s_1 (t) é uma tensão.

Admitamos que esse impulso se centra na origem dos tempos e representemo-lo por i_u (t). i_u (t) traduz, portanto, uma tensão com a seguinte variação no tempo:

$$i_u(t) = 0 \qquad t \neq 0$$
$$i_u(t) \to \infty \qquad t \to 0$$

Seja r_u (t) a resposta que o sistema dá ao impulso i_u (t).

Por se tratar dum sistema fisicamente realizável deverá ser

$$r_u(t) \equiv 0 \qquad t < 0$$

pois que i_u (t) se concentra na origem dos tempos e portanto não podiamos ter no passado $t < 0$ uma resposta dependente dum acontecimento ocorrendo num instante futuro $t = 0$.

Consideremos agora um impulso unitário ocorrendo no instante τ. Será analiticamente definido por

$$i_u(t-\tau) = 0 \qquad t \neq \tau$$
$$i_u(t-\tau) \to \infty \qquad t \to \tau$$

A resposta a este impulso unitário, dado que o sistema é invariante no tempo, será

$$r_u(t-\tau)$$

Teremos neste caso

$$r_u(t-\tau) \equiv 0 \qquad t < \tau$$

* * *

Posto isto consideremos um impulso elementar de aplitude s_1 (τ) de duração $\partial\tau$ e centrado no instante τ.

Se a resposta ao impulso unitário centrado em τ for r_u ($t-\tau$) a resposta ao impulso elementar de amplitude s_1 (τ) será, dada a linearidade do sistema,

$$r_u(t-\tau) \times \frac{s_1(\tau)}{E_u}$$

em que E_u é a amplitude do impulso unitário. Multipliquemos ambos os membros por $\delta\tau$ e tomemos o limite quando $\delta\tau \to 0$, identificando-se no numerador $\delta\tau$ com $d\tau$ grandeza infinitésimal.

Teremos

$$\lim_{\delta\tau \to 0} r_u(t-\tau)\ \frac{s_1(\tau)\ \delta\tau}{E_u\ .\ \delta\tau} = s_1(\tau)\ \frac{r_u(t-\tau)\ d\tau}{1}$$

pois que, por definição de impulso unitário, se tem

$$\lim_{\delta\tau \to 0} E_u\ \delta\tau = 1$$

1 tem as dimensões [volt. seg.] pelo que

$$s_1(\tau)\ r_u(t-\tau)\ d\tau$$

tem as dimensões duma tensão

* * *

Por definição de sistema linear a resposta $s_2(t)$ será o somatório das respostas de cada um dos impulsos o que, no limite, se traduz pelo integral

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{t} s_1(\tau)\ r_u(t-\tau)\ d\tau$$

(2.1) Interpretação física da solução

A integração estende-se a todo o passado do instante t em que se considera a resposta $s_2(t)$

Se a integração se fizesse ao longo de todo o tempo, obtínhamos o mesmo resultado pois que para $\tau > t$ é $(t-\tau) < 0$

e $$r_u(t-\tau) = 0 \qquad \tau > t$$

Isto é, o facto de $s_2(t)$ só depender dos valores de $s_1(\tau)$ tomados no passado de t reflete-se no cálculo através da natureza da resposta $r_u(t)$ ao impulso unitário $i_u(t)$.

* * *

Vejamos agora em que medida a resposta $s_2(t)$ depende do passado de t.

Consideremos na (Fig. 3) uma resposta típica $r_u(t)$ dum sistema linear ao impulso unitário $i_u(t)$.

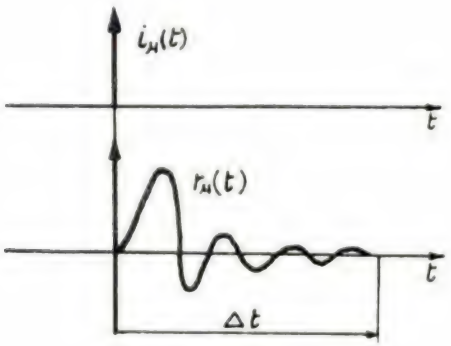


Fig. 3

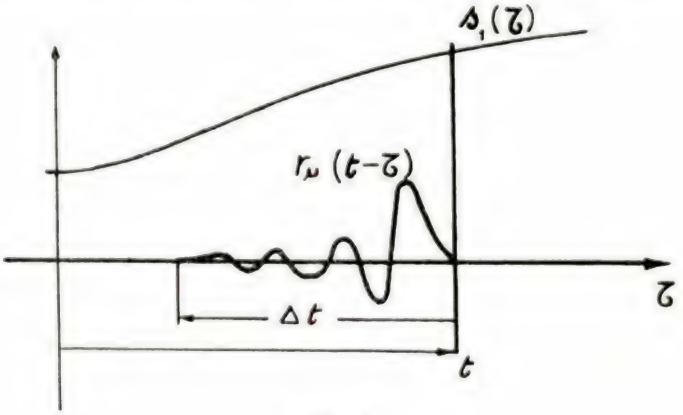


Fig. 4

Na (Fig. 4) representa-se a função $s_1(\tau)$ e toma-se um instante t.

No mesmo sistema representemos agora $r_u(t-\tau)$.

Para $\tau > t$ já vimos que é nula.

Para $\tau < t$ tem em relação ao instante t o mesmo andamento que $r_u(-t)$ apresenta em relação à origem do tempo, ou seja, $r_u(t)$ tomado num sentido inverso.

* * *

Uma vez que a resposta $r_u(t)$ se anula pràticamente ao fim dum tempo Δt segue-se que a função integranda é pràticamente nula para todos os instantes.

$$\tau < t - \Delta t$$

e que, portanto,

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{t} s_1(\tau)\ r_u(t-\tau)\, d\tau \simeq \int_{t-\Delta t}^{t} s_1(\tau)\ r_u(t-\tau)\, d\tau$$

Conclusão :

A duração significativa de $r_u(t)$ mede a dependência da resposta $s_2(t)$ relativamente ao passado do instante t.

Isto significa que, embora teòricamente $s_2(t)$ dependa de todo o passado de t, pràticamente só depende dos valores que $s_1(\tau)$ toma num passado finito Δt.

Evidentemente que em geral a função $r_u(t)$ é ilimitada no tempo sendo diferente de zero para $t \geqslant 0$. Na realidade, porém, reduz-se ao fim dum tempo finito Δt a um valor suficientemente pequeno para que, relativamente à precisão com que se conhece $s_2(t)$ (relação sinal-ruído). a sua contribuição possa ter significado para intervalos superiores a Δt.

Este é um facto importante que convém salientar.

* * *

Dum modo geral podemos dizer que todas as respostas $r_u(t)$ ao impulso unitário satisfazendo às duas condições

$$(1) \quad r_u(t) \equiv 0 \quad t < 0$$

$$(2) \quad r_u(t) \to 0$$

$$t \to \infty$$

equivalente pràticamente

$$(2)' \quad r_u(t) \simeq 0$$

$$t > \Delta t$$

são respostas típicas de sistemas fìsicamente realizáveis.

A última condição (2) pode teòricamente não se realizar, mesmo num sistema fìsicamente realizável, embora pràticamente se cumpra sempre, dada a inevitável existência de perdas.

3 — OPERADOR LINEAR DE TRANSMISSÃO

Vamos agora introduzir um novo conceito o de «operador linear de transmissão» para funções exponenciais que abreviàdamente denominaremes «operador linear de transmissão». Para isso demos outra forma à expressão de $s_2(t)$.

Tínhamos

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{t} s_1(\tau)\ r_u(t-\tau)\, d\tau$$

Façamos uma mudança de variáveis

$$t - \tau = \tau'$$

Teremos imediatamente após cálculos simples

$$s_2(t) = \int_0^{\infty} s_1(t-\tau')\, r_u(\tau')\, d\tau'$$

que é outra forma de obter a resposta $s_2(t)$.

Vamos admitir que $s_1(t)$ é uma função exponencial da forma

$$s_1(t) = E\, \varepsilon^{pt}$$

Teremos sucessivamente

$$s_1(t-\tau') = E\, \varepsilon^{pt}\, \varepsilon^{-p\tau'}$$

e

$$s_2(t) = E\, \varepsilon^{pt} \int_0^{\infty} r_u(\tau')\, \varepsilon^{-p\tau'}\, d\tau'$$

ou ainda

$$s_2(t) = s_1(t) \int_0^{\infty} r_u(\tau')\, \varepsilon^{-p\tau'}\, d\tau'$$

Denominando

$$\int_0^{\infty} r_u(\tau')\, \varepsilon^{-p\tau'}\, d\tau' = R(p)$$

obtém-se

$$s_2(t) = R(p)\, s_1(t)$$

Conclusão: Quando a função $s_1(t)$ é exponencial existe um «operador linear de transmissão $R(p)$ que permite obter por uma simples multiplicação $s_2(t)$ de $s_1(t)$.

$R(p)$ relaciona-se com a resposta ao impulso unitário por

$$R(p) = \int_0^{0} r_u(\tau')\, \varepsilon^{-p\gamma'}\, d\tau'$$

Isto é, $R(p)$ é a transformada de Laplace de $r_u(\tau')$,

* * *

Façamos agora $p = j\omega$

$$s_1(t) = \vec{E}\, \varepsilon^{j\omega t}$$

onde $\vec{E}$ designa com generalidade uma amplitude complexa.

Nestas condições teremos:

$$R(p) = R(j\omega) = \vec{R}(\omega)$$

que é uma grandeza complexa.

* * *

Escrevamos agora $\vec{R}(\omega)$ sob a seguinte forma:

$$\vec{R}(\omega) = A(\omega)\, \varepsilon^{-j\phi(\omega)}$$

Demonstra-se que $A(\omega)$ é uma função par de ω e que $\phi(\omega)$ é numa função impar, o que significa que o operador relativo a $\varepsilon^{-j\omega t}$ será

$$\vec{R}(-\omega) = A(\omega)\, \varepsilon^{+j\phi(\omega)}$$

(3.1) Significado físico de A (ω) e ϕ (ω)

Vejamos agora qual o significado de A (ω) e ϕ (ω). Consideremos para tanto uma função sinusoidal.

$$s_1 (t) = E \text{ sen } (\omega t + \alpha_1)$$

Podemos escrevê-la sob forma exponencial

$$s_1 (t) = E \frac{\varepsilon^{j(\omega t + \alpha)} - \varepsilon^{-j(\omega t + \alpha)}}{2j}$$

Para determinar s_2 (t) basta aplicar a cada parcela o respectivo operador, donde virá

$$s_2 (t) = \vec{R} (\omega) \frac{E \varepsilon^{j\alpha}}{2j} \varepsilon^{j\omega t} - \vec{R} (-\omega) \frac{E \varepsilon^{-j\alpha}}{2j} \varepsilon^{-j\omega t}$$

Atendendo às expressões de $\vec{R}$ (ω) e $\vec{R}$ (−ω) obtem-se:

$$s_2 (t) = A (\omega) E \text{ sen } [\omega t + \alpha_1 - \Phi (\omega)] = E_1 \text{ sen } [\omega t + \alpha_2]$$

Conclusão: A resposta a uma função sinusoidal é uma função sinusoidal cuja amplitude é

$$E_2 = A (\omega) E_1$$

e a fase relativa à origem do tempo é

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \Phi (\omega)$$

ou seja uma desfasagem relativa entre a entrada e saída de

$$\alpha_2 - \alpha_1 = - \Phi (\omega)$$

Nestas condições R (ω) pode obter-se experimentalmente a partir duma experiência simples Basta aplicar ao quadripolo uma tensão sinusoidal e medir a relação das amplitudes

$$\frac{E_2}{E_1} = A (\omega)$$

e a desfasagem

$$\alpha_2 - \alpha_1 = - \Phi (\omega)$$

4 — ANÁLISE DE FOURIER

Vamos agora determinar a resposta s_2 (t) por um processo diferente. Trata-se ainda duma decomposição do sinal s_1 (t) num somatório de funções elementares.

Estabelecida a resposta para cada função elementar, e dado que o sistema é linear obtém-se a resposta final através dum integral.

Uma vez que se conhece um processo simples de obter a resposta a uma função exponencial o problema fica resolvido se conseguirmos decompor a função s_1 (t) em exponenciais elementares

$$\vec{S}_1 (\omega) \, d\omega \, \varepsilon^{j\omega t} \qquad -\infty < \omega < \infty$$

Então, uma vez que

$$s_1 (t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}_1 (\omega) \, \varepsilon^{j\omega t} \, d\omega$$

e a resposta à exponencial $\vec{S_1}(\omega)\, d\omega\, \varepsilon^{j\omega t}$ é

$$\vec{R}(\omega)\, \vec{S_1}(\omega)\, d\omega\, \varepsilon^{j\omega t}$$

a resposta, $s_2(t)$, pretendida será

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{R}(\omega)\, \vec{S_1}(\omega)\, \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega .$$

Resta averiguar se a decomposição é possível e sendo-o como determinar $\vec{S_1}(\omega)$.

Recorramos para isso ao seguinte teorema:

Teorema: Seja uma função f (t) que satisfaz às seguintes condições:

(1) É seccionalmente contínua (*) em cada intervalo (t_1, t_2).

(2) O integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ é convergente.

Nessas condições em qualquer instante "t" em que f (t) tenha derivada à esquerda e derivada à direita verifica-se a igualdade:

$$\frac{1}{2}\left[f(t-0) + f(t+0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j\omega(t-t')}\, f(t')\, dt')$$

Esta é a chamada «igualdade de Fourier».

Desde que se defina nos pontos de descontinuidade

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t-0) + f(t+0)\right]$$

pode escrever-se a igualdade sob a seguinte forma

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, \varepsilon^{-j\omega t'}\, dt'\right] \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega$$

ou

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(\omega)\, \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega$$

e que

$$\vec{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, \varepsilon^{-j\omega t'}\, dt'$$

Estas duas relações resolvem-nos o problema pretendido pois que nos mostram que f (t) admite uma decomposição elementar em funções exponenciais da forma

$$\vec{F}(\omega)\, \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega$$

em que

$$\vec{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, \varepsilon^{-j\omega t'}\, dt'$$

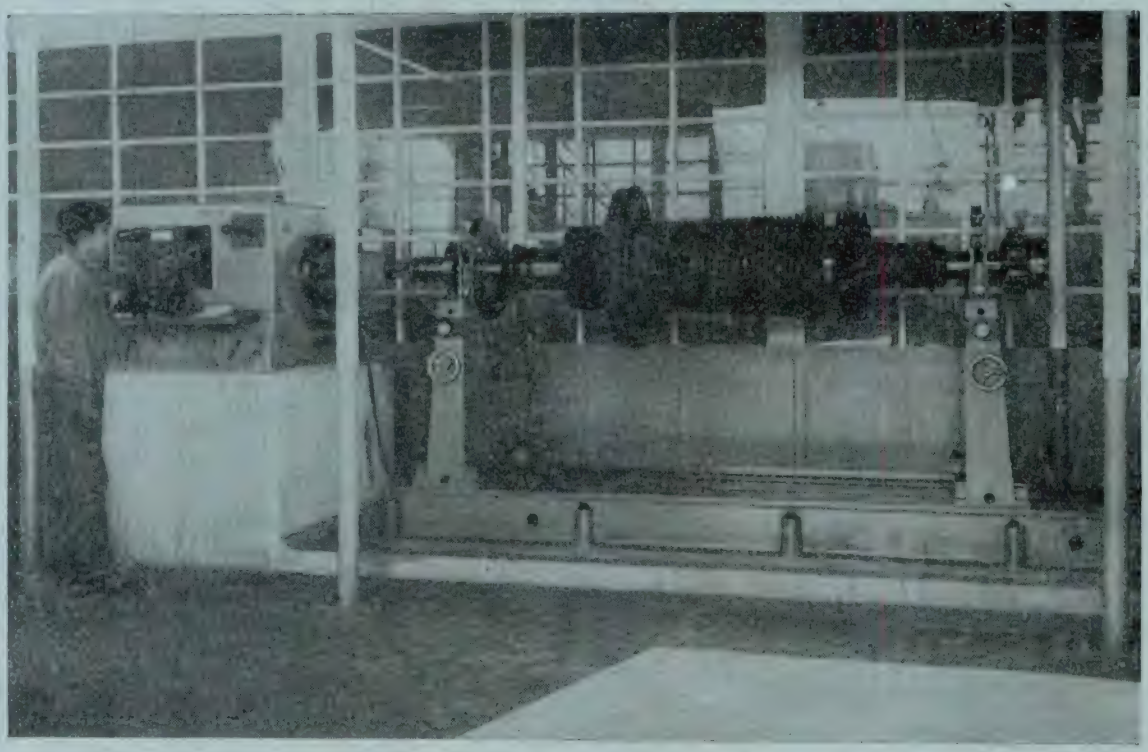
Por outro lado a maior parte das funções de interesse prático satisfazem às condições do Teorema. Casos há que assim não sucede podendo, no entanto, continuar a usar-se a análise de Fourier desde que se tomem precauções especiais.

(*) Uma função diz-se seccionalmente contínua num intervalo finito (t_1, t_2) se esse intervalo pode ser subdividido num número finito de intervalos em cada um dos quais a função é contínua e tem limites finitos quando a variável se aproxima interiormente dos extremos.

Veja...
O que há por trás do
MOTOR EFA
EXPERIÊNCIA
QUALIDADE
ECONOMIA
DISTRIBUIDORES GERAIS:
INDÚSTRIAS ELÉCTRICAS ASSOCIADAS — INEL
Sede em Lisboa: Rua Rodrigo da Fonseca, 70 4.º
Telef. 730161/2/3/4/5 — Teleg. INELA-LISBOA
Delegação no Porto: Rua de Santa Catarina, 470
Telef. 28841, 28842 e 28843 — Teleg. INELAPO-PORTO

A COMPANHIA UNIÃO FABRIL

põe à disposição dos seus clientes no Estaleiro Naval:



— Uma oficina de Ensaios e Reparação Diesel

— Uma máquina electrodinâmica de equilibragem para rotores de 30 a 3000 Kgs. — 2 M. de diâmetro máximo — 3,420 m. entre apoios.

ROCHA DO CONDE DE ÓBIDOS

LISBOA

Telef. 66 21 48

* * *

$\vec{F}(\omega)$ é dum modo geral uma grandeza complexa e denomina-se espectro de f (t) o que simbòlicamente traduzimos por

$$\vec{F}(\omega) = \vec{E}\,[\,f(t)\,]$$

* * *

De acordo com este resultado podemos, pois, escrever para a resposta $s_2(t)$

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{R}(\omega)\,\vec{S}_1(\omega)\,\varepsilon^{j\omega t}\,d\omega$$

em que $\vec{S}_1(\omega)$ é o espectro de $s_1(t)$

$$\vec{E}\,[\,s_1(t)\,] = \vec{S}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t')\,\varepsilon^{-j\omega t'}\,dt'$$

Por outro lado teremos que, sendo $\vec{S}_2(\omega)$ o espectro de $s_2(t)$, se deverá verificar

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}_2(\omega)\,\varepsilon^{j\omega t}\,d\omega$$

donde se conclui que

$$\vec{S}_2(\omega) = \vec{R}(\omega)\,\vec{S}_1(\omega)$$

Isto é, o espectro de $s_2(t)$ obtém-se do espectro de $s_1(t)$ através do operador linear de transmissão, era evidente que devia ser assim.

* * *

Podemos escrever $\vec{S}_1(\omega)$ sob a seguinte forma

$$\vec{S}_1(\omega) = \frac{a_1(\omega)}{2} - j\,\frac{b_1(\omega)}{2}$$

$a_1(\omega)$ é uma função par e $b_1(\omega)$ numa função ímpar. Substituindo em $s_1(t)$ obtém-se

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a_1(\omega)}{2} - j\,\frac{b_1(\omega)}{2}\right)\varepsilon^{j\omega t}\,d\omega$$

o que conduz, após cálculos simples, a

$$s_1(t) = \int_0^{\infty} a_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega + \int_0^{\infty} b_1(\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t\,d\omega$$

o que permite interpretar uma função $s_1(t)$ como uma síntese de funções elementares

$$a_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

$$b_1(\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t\,d\omega$$

Da relação

$$\vec{S}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t')\,\varepsilon^{-j\omega t'}\,dt'$$

resulta imediatamente

$$a_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t') \cos \omega t' \, dt'$$

$$b_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t') \operatorname{sen} \omega t' \, dt'$$

* * *

Evidentemente que, em relação a esta nova forma de decomposição, a resposta $s_2(t)$ se obtém aplicando a cada função elementar, que é sinusoidal, o operador linear $[A(\omega), -\phi(\omega)]$ obtendo-se

$$s_2(t) = \int_0^{\infty} A(\omega)\, a_1(\omega) \cos[\omega t - \Phi(\omega)]\, d\omega + \int_0^{\infty} A(\omega)\, b_1(\omega) \operatorname{sen}[\omega t - \Phi(\omega)]\, d\omega$$

(4.1) Espectro de funções periódicas. Função de Dirac

Consideremos a expressão analítica do espectro de $f(t)$

$$\vec{E}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, \varepsilon^{-j\omega t'}\, dt'$$

e seja $f(t)$ uma função periódica: $\varepsilon^{j\omega t}$, $\operatorname{sen} \omega t$, etc.

Para estas funções o integral não converge para qualquer limite ficando-se aparentemente impossibilitado de utilizar, para as funções periódicas, a definição de espectro tal como foi dada.

Na realidade não é assim podendo, dentro de certo convencionalismo justificado pelos resultados que se obtêm, utilizar-se a mesma definição para as funções periódicas.

Recorramos para isso à função de Dirac $\delta(x)$ que satisfaz às seguintes propriedades:

$$\delta(x - x_0) = 0 \qquad x \neq x_0$$

$$\delta(x - x_0) \to \infty \qquad x \to x_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = f(x_0)$$

em que $f(x)$ é uma função contínua.

$\delta(x - x_0)$ representa uma localização de amplitude infinita para uma dada abcissa x_0 da variável x.

$\delta(x)$ representa uma localização para $x = 0$ $(x_0 = 0)$.

* * *

$\delta(x)$ pode interpretar-se como o limite quando $\alpha \to 0$ de determinadas funções $\delta(x, \alpha)$ satisfazendo às seguintes condições:

$$\delta(x, \alpha) \geqslant 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < \alpha < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, \alpha)\, dx = 1 \qquad 0 < \alpha < \infty$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \delta(x, \alpha) = 0 \qquad x \neq 0$$

Existem diversos exemplos de funções satisfazendo a estas condições. O impulso unitário rectangular, tal como o definimos, é uma delas.

De facto, tínhamos definido o impulso unitário rectangular como sendo um impulso de amplitude.

$$E = K \frac{1}{\delta \tau}$$

e duração

$$T = \delta \tau$$

em que

$$\delta \tau \to 0 \qquad \text{e } K = 1 \text{ [volt-seg]}$$

Isto significa que o impulso unitário rectangular equivale à função δ (x, α) definida por

$$\delta (x, \alpha) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{\alpha}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\alpha}{2} \end{cases} \qquad \delta \tau = \alpha$$

É fácil de verificar que esta função satisfaz às condições acima referidas e que quando $\alpha \to 0$ se identifica com δ (x).

* * *

Tomaremos, pois, o impulso rectangular unitário como uma função i_u (t) que satisfaz às propriedades da função de Dirac δ (t)

$$\delta (t - t_o) = 0 \qquad t \neq t_o$$
$$\delta (t - t_o) \to \infty \qquad t \to t_o$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f (t) \, \delta (t - t_o) \, dt = f (t_o)$$

O mesmo sucedendo, no limite, a todas as outras funções δ (t,α) satisfazendo às condições anteriormente referidas. Todas estas funções traduzem impulsos unitários satisfazendo às propriedades da função de Dirac.

Teremos como exemplo de impulsos unitários as seguintes funções do tempo

$$\delta (t - t_o, \alpha)$$
$$\alpha \to 0$$

(a)
$$\delta (t - t_o, \alpha) = \begin{cases} 0 & |t - t_o| > \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{\alpha} & |t - t_o| \leqslant \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

(b)
$$\delta (t - t_o, \alpha) = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \, \varepsilon^{-\left(\frac{t - t_o}{\alpha}\right)^2}$$

(c)
$$\delta (t - t_o, \alpha) = \frac{\alpha}{\pi} \, \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{t - t_o}{\alpha}\right)}{(t - t_o)^2}$$

Todas estas funções representam localizações centradas no instante $t = t_o$.

Chama-se a atenção para as dimensões físicas que devem ser devidamente interpretadas, como fizemos anteriormente.

* * *

Utilizando a propriedade integral da função $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x - x_o)\ dx = f(x_o)$$

vamos determinar o espectro da função periódica elementar $\varepsilon^{j\omega_o t}$.

Seja $\vec{C}(\omega)$ o espectro pretendido. Por definição de espectro deverá ser

$$\varepsilon^{j\omega_o t} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{C}(\omega)\ \varepsilon^{j\omega t}\ d\omega$$

De acordo com a referida propriedade teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j\omega t}\ \delta(\omega - \omega_o)\ d\omega = \varepsilon^{j\omega_o t}$$

pelo que identificaremos $\vec{C}(\omega)$ com $\delta(\omega - \omega_o)$.

Diremos, pois, que

$$\vec{E}\,[\varepsilon^{j\omega_o t}] = \delta(\omega - \omega_o)$$

Conclusão: O espectro de $\varepsilon^{j\omega_o t}$ traduz-se por uma localização de amplitude infinita em $\omega = \omega_o$ (frequência f_o).

* * *

Para se obter o espetro de $\cos \omega_o t$, $\operatorname{sen} \omega_o t$, etc. basta escrever estas funções na sua decomposição exponencial e aplicar o resultado obtido.

Deste modo teremos:

$$\vec{E}\,[\cos \omega_o t] = \vec{E}\left[\frac{\varepsilon^{j\omega_o t} + \varepsilon^{-j\omega_o t}}{2}\right] = \frac{\delta(\omega - \omega_o)}{2} + \frac{\delta(\omega + \omega_o)}{2}$$

$$\vec{E}\,[\operatorname{sen} \omega_o t] = \vec{E}\left[\frac{\varepsilon^{j\omega_o t} - \varepsilon^{-j\omega_o t}}{2j}\right] = \frac{\delta(\omega - \omega_o)}{2j} - \frac{\delta(\omega + \omega_o)}{2j}$$

(4.2) Relação entre $\vec{R}(\omega)$ e $r_u(t)$

Vamos agora estabelecer a relação existente entre o operador linear $\vec{R}(\omega)$ e a resposta $r_u(t)$ ao impulso unitário $r_u(t)$.

* * *

Já se tinha estabelecido a relação

$$R(p) = \int_{o}^{\infty} r_u(\tau')\ \varepsilon^{-p\tau'}\ d\tau'$$

Uma vez que $r_u(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ podemos escrever

$$R(p) = \int_{-\infty}^{\infty} r_u(t')\ \varepsilon^{-pt'}\ dt'$$

em que se substituiu τ' por t'

Fazendo $p = j\omega$ teremos

$$R(j\omega) = \vec{R}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_u(t')\ \varepsilon^{-j\omega t'}\ dt'$$

donde se conclui que

$$\vec{R}(\omega) = 2\pi \; \vec{E}\,[r_u(t)]$$

Conclusão: O operador linear de transmissão é 2π vezes o espectro de $r_u(t)$.

* * *

(4.3) Espectro do impulso unitário $i_u(t)$

Vamos agora determinar o espectro do impulso unitário $i_u(t)$. Apliquemos a expressão geral

$$\vec{E}\,[i_u(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i_u(t')\, \varepsilon^{-j\omega t'}\, dt'$$

Identificando $i_u(t)$ com a função de Dirac e atendendo à propriedade integral já considerada teremos imediatamente

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t')\, \varepsilon^{-j\omega t'}\, dt' = \frac{1}{2\pi} \left[\varepsilon^{-j\omega t'}\right]_{t'=0} = \frac{1}{2\pi} \text{ [volt. seg]}$$

Conclusão: O espectro dum impulso unitário $i_u(t)$ é uma grandeza constante $\frac{1}{2\pi}$.

Teremos, portanto, uma distribuição uniforme no domínio da frequência.

* * *

Este resultado está de acordo com a relação estabelecida entre $\vec{R}(\omega)$ e o espectro de $r_u(t)$

$$\vec{R}(\omega) = 2\pi \; \vec{E}\,[r_u(t)]$$

De facto, representando $r_u(t)$ a resposta ao impulso unitário, deveremos ter

$$\vec{E}\,[r_u(t)] = \vec{R}(\omega)\; \vec{E}\,[i_u(t)]$$

pois que $i_u(t)$ representa a função de entrada, $s_1(t)$, e $r_u(t)$ a resposta $s_2(t)$.

Substituindo $\vec{E}\,[i_u(t)]$ por $\frac{1}{2\pi}$ obtém-se imediatamente a referida relação

5 — DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE $r_u(t)$

Uma vez que um impulso unitário representa um estado limite, irrealizável na prática, averiguemos em que medida se pode, experimentalmente, determinar $r_u(t)$.

Consideremos, para tanto, um impulso rectangular de amplitude E, duração T e centrado na origem dos tempos.

O espectro desse impulso obtém-se fàcilmente e tem por expressão

$$\frac{E}{\pi\omega} \operatorname{sen} \frac{\omega T}{2} = \frac{ET}{2\pi} \; \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$$

Admitamos agora que pretendemos determinar a resposta a este impulso dum sistema caracterizado por um operador linear $\vec{R}(\omega)$.

Teremos:

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{R}(\omega) \frac{ET}{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \varepsilon^{j\omega t} d\omega$$

Suponhamos que se trata dum sistema passa-baixo em que a característica de amplitude A (ω)

$$\vec{R}(\omega) = A(\omega)\, \varepsilon^{-j\phi(\omega)}$$

se reduz pràticamente a zero para $|\omega| > \omega_L$.

Nestas condições $s_2(t)$ pode-se obter aproximadamente integrando entre os limites $-\omega_L$ e ω_L.

Sendo assim, é sempre possível determinar um valor de T suficientemente curto para que em toda a banda $(-\omega_L, \omega_L)$ se tenha

$$\frac{\operatorname{sen} \omega\, T/_2}{\omega\, T/_2} \simeq 1$$

Para o que basta determinar T tal que

$$\operatorname{sen} \omega_L \frac{T}{2} \simeq \omega_L \frac{T}{2}$$

Sendo assim

$$s_2(t) \simeq ET \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \vec{R}(\omega)\, \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega$$

ou seja ainda

$$s_2(t) = ET \,.\, r_u(t)$$

uma vez que $\frac{1}{2\pi}$ é o espectro do impulso unitário.

ET — deve interpretar-se como uma quantidade sem dimensões pois que as dimensões físicas se associam a $\frac{1}{2\pi}$.

Conclusão: A resposta ao impulso unitário pode obter-se aproximadamente, à parte uma constante (ET), determinando a resposta a um impulso rectangular de amplitude E e duração T tal que

$$\operatorname{sen} \omega_L \frac{T}{2} \simeq \omega_L \frac{T}{2}$$

em que ω_L corresponde à frequência limite do sistema que se supõe do tipo passa-baixo.

6 — INTERPRETAÇÃO DOS MÉTODOS APRESENTADOS

Relativamente ao problema que se pretende resolver — «Determinação da resposta de sistemas lineares de transmissão» — considerámos dois métodos gerais de análise, um no domínio do tempo outro no domínio da frequência.

Existem relações bem definidas entre ambos e de certo modo completam-se no que respeita à interpretação que através deles se pode dar aos fenómenos.

Antes de estabelecermos a teoria das séries no tempo convém proceder a uma comparação dos dois processos salientando o que neles há de essencial.

* * *

Qualquer dos métodos baseia-se na propriedade fundamental dos sistemas lineares. Efectivamente consistem bàsicamente no seguinte:

Decompor a função de entrada $s_1(t)$ num somatório de funções elementares de cujo tipo se sabe determinar a resposta.

A resposta $s_2(t)$ obtém-se a partir do somatório das respostas das funções elementares, o que no limite se traduz por um integral.

No primeiro método cada função elementar é um impulso de duração infinitesimal, $d\tau$ e de amplitude $s_1(\tau)$.

No segundo, cada função elementar é uma exponencial $\vec{S}_1(\omega)\,\varepsilon^{j\omega t}\,d\omega$ ou um par de funções sinusoidais $[a_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega,\ b_1(\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega(t)\,d\omega]$. $\vec{S}_1(\omega)$ é o espectro de $s_1(t)$.

No primeiro método desenvolve um papel fundamental a resposta $r_u(t)$ que o sistema apresenta a um impulso rectangular unitário.

A resposta $r_u(t)$ é a mesma, qualquer que seja a natureza da função $\delta(t, \alpha)$ que no limite se identifica como a função de Dirac $\delta(t)$. Porém, no tipo de raciocínio utilizado houve conveniência em considerar um impulso unitário rectangular.

No segundo método é fundamental o operador linear de transmissão $\vec{R}(\omega)$.

As respostas às funções elementares consideradas são respectivamente expressas em função de $r_u(t)$ e $\vec{R}(\omega)$ do modo seguinte:

$$r_u(t-\tau)\ s_1(\tau)\,d\tau$$

$$\vec{R}(\omega)\ \vec{S}_1(\omega)\,\varepsilon^{j\omega t}\,d\omega$$

Entre $r_u(t)$ e $\vec{R}(\omega)$ existe uma relação bem definida

$$\vec{R}(\omega) = 2\pi\ \vec{E}\,[r_u(t)]$$

$\vec{R}(\omega)$ detarmina-se fàcilmente a partir duma experiência simples.

$r_u(t)$ também se pode determinar de modo aproximado a partir de impulsos rectangulares de amplitude finita e duração T suficientemente curta, como atrás se demonstrou.

* * *

Convém notar que as funções elementares consideradas representam duas situações extremas.

No primeiro caso utilizam-se impulsos de duração infinitesimal que representam funções bem localizadas no tempo, instante "τ". O seu espectro, no entanto, distribui-se uniformemente no domínio da frequência. É constante e vale.

$$\frac{s_1(\tau)\,d\tau}{2\pi}$$

uma vez que o espectro do impulso unitário vale $\dfrac{1}{2\pi}$.

No segundo caso temos funções periódicas que existem desde $t = -\infty$ até $t = +\infty$, trata-se duma distribuição uniforme (periodicidade) que se estende a todo o tempo.

Por outro lado, cada função elementar

$$\vec{S}_1(\omega')\,\varepsilon^{j\omega' t}\,d\omega$$

tem um espectro bem localizado na frequência ω'. O espectro de cada função elementar será

$$\vec{S_1}(\omega)\, d\omega\, \delta(\omega - \omega')$$

Uma vez que o espectro de $\varepsilon^{j\omega t'}$ é $\delta(\omega - \omega')$.

* * *

Conclui-se daqui que a resposta à função $s_1(t)$ se pode determinar a partir de dois processos fundamentais.

(1) Processo

Envolve o conhecimento do valor que $s_1(t)$ toma em todos os instantes $\tau = -\infty$ até $\tau = t$ em que t é o instante em que se pretende conhecer $s_2(t)$.

Conhecida a expressão analítica de $s_1(t)$ e a função $r_u(t)$ o problema está resolvido, vindo

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{t} s_1(\tau)\, r_u(t - \tau)\, d\tau$$

$r_u(t)$ representa, pois, numa grandeza que define completamente o sistema de transmissão

(2) Processo

Envolve o conhecimento do valor $\vec{S_1}(\omega)$ do espectro de $s_1(t)$ de $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$

Conhecida $\vec{S_1}(\omega)$ e o operador linear de transmissão, $\vec{R}(\omega)$, a resposta determina-se a partir de

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{R}(\omega)\, \vec{S_1}(\omega)\, \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega$$

$\vec{R}(\omega)$ representa também uma grandeza carecterística do sistema

Conclusão final: A utilização dos dois métodos envolve o conhecimento de todos os valores que duas funções $s_1(t)$ ou $\vec{S_1}(\omega)$ tomam nos domínios t ou ω. Isto é, temos que conhecer distribuições contínuas $s_1(t)$ ou $\vec{S_1}(\omega)$.

Em qualquer dos processos a determinação da resposta $s_2(t)$ envolve o cálculo dum integral.

Qualquer dos processos exige apenas o conhecimento duma função $r_u(t)$ ou $\vec{R}(\omega)$, característica do sistema, que pode ser determinada experimentalmente.

Ao primeiro processo está associada a descrição completa da função de entrada no domínio do tempo $s_1(t)$.

Ao segundo processo está associada a descrição completa da função de entrada no domínio da frequência $\vec{S_1}(\omega)$.

$s_1(t)$ e $\vec{S_1}(\omega)$ determinam-se uma a partir da outra através de

$$\vec{S_1}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} s_1(t')\, \varepsilon^{-j\omega t'}\, dt'$$

$$s_1(t) = \int_{\infty}^{\infty} \vec{S_1}(\omega)\, \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega$$

HEENAN & FROUDE LTD.

WORCESTER

ENGLAND

VELOCIDADE VARIÁVEL COM

Motor «shunt» de corrente contínua

Unidade electrónica de rectificação

Regulador de velocidade

Representada por:

THE ENGINEERING COMPANY OF PORTUGAL, LDA.

Rua dos Remolares, 12-1.º — LISBOA

Em qualquer regimen de temperatura

ENERGOL
VISCO-STATIC
o óleo das 4 estações

Também $r_u(t)$ e $\vec{R}(\omega)$ se relacionam de forma semelhante.

$$\vec{R}(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} r_u(t') \, \varepsilon^{-j\omega t'} \, dt'$$

$$r_u(t) = \int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \vec{S_1}(\omega) \, \varepsilon^{j\omega t} \, d\omega$$

* * *

Como veremos a utilização da «Teoria das Séries no Tempo» representa uma atitude diversa da que se expôs e é comum aos dois processos.

Então, apenas teremos que conhecer os valores que a função toma em instantes discretos «t_n». Isto evidentemente implica uma restrição relativamente à natureza da função $s_1(t)$.

* * *

Com esta introdução não se pretendeu expor nem a teoria dos integrais de convolução para o cálculo de respostas (1.º processo) nem a teoria do Integral de Fourier. Os dois métodos foram apresentados como dois aspectos complementares caracterizados essencialmente pela necessidade comum do conhecimento de distribuições contínuas no domínio do tempo e da frequência.

Este facto marca a diferença essencial entre os dois métodos considerados e o processo associado à Teoria das Séries no Tempo.

(Continua)

C. D. U. 621.311.5/91

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.)

NOTA: *As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 91,6 % dos totais do País.*

JULHO

I — Breve nota mensal

Do ponto de vista hidrológico o presente mês foi nìtidamente seco, bastante abaixo da média.

II — Elementos gerais (GWh)

a) Mensais

	1956	1957	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	158,3	163,0	+ 3
Produção térmica (P_t)	0,3	0,0	—100
Produção total (P_T)	158,6	163,0	+ 3
Cons. electroquímico (C_{eq}) (1)	36,7	23,9	— 35
Cons. permanentes (C_p) . . (1)	114,5	131,1	+ 14
Consumo total (C_T) . . . . (1)	151,2	155,0	+ 2

b) Acumulados desde 1 de Janeiro de 1957

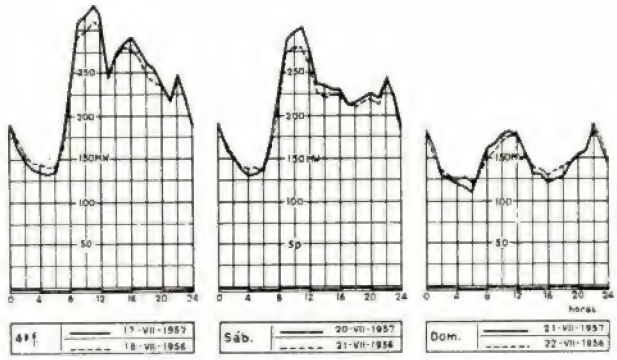
	1956	1957	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	1114,2	1161,8	+ 2
Produção térmica (P_t)	3,6	51,4	-
Produção total (P_T)	1147,8	1213,2	+ 6
Cons. electroquímico (C_{eq}) . (1)	288,7	239,2	— 17
Cons. permanentes (C_p) . . . (1)	822,7	914,8	+ 11
Consumo total (C_T) . . . . . (1)	1111,4	1154,0	+ 4

Nota:

(1) Vidé nota referente ao mês de Janeiro de 1957.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

	4.ª feira:	
	11-7-956	17-7-957
Produção hidráulica (P_h) — MWh	5499	5687
Produção térmica (P_t) — MWh . .	0	0
Produção total (P_T) — MWh . . .	5499	5687
Utilização da ponta (U) — horas	17,0	17,0
Factor de carga (α)	0,71	0,71
Relação $\frac{\text{Pot. min.}}{\text{Pot. máx.}}$ (r)	0,39	0,39



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras no fim do mês.

Albufeira	Energia armazenada	
	GWh	% (1)
Venda Nova	84,5	66,1
Salamonde	0,2	0,9
Caniçada	26,0	78,4
Guilhofrei	4,9	59,6
Lagoa Comprida	17,5	59,7
Santa Luzia	32,7	53,1
Cabril	175,0	51,6
Castelo do Bode	138,1	84,7
Pracana	2,4	18,7
Póvoa	6,1 (2)	40,3
Total	488,8	59,1

Notas:

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras, definido pela relação

$$\frac{\text{Energia armazenada}}{\text{Máx. energia armazenável}} \times 100\ \%$$

(2) Inclui 1,6 GWh armazenados no açude do Poio.

C. D. U. 624.041.2

O MÉTODO DE RELAXAÇÃO

SUA APLICAÇÃO AO CÁLCULO DE ESTRUTURAS RECTICULARES CONTÍNUAS PLANAS CONTENDO PEÇAS CURVAS

PELO ENG.º CIVIL ANTÓNIO PACHECO CORREIA DE CINTRA

I — Introdução

Constitui o método de relaxação, uma das mais poderosas e eficientes ferramentas, que a matemática, a física e a técnica, adquiriram nos últimos tempos. Foi o mesmo, ainda há poucos anos apresentado originalmente e com carácter doutrinário e sistemático, pelo Professor R. V. Southwell, através das suas duas obras «Relaxation Methods in Engineering Science», e «Relaxation Methods in Teoretical Physics», das quais conhecemos a primeira.

Ataca o seu autor nestas obras, várias aplicações do método de relaxação, sendo uma dessas aplicações, a que se refere ao cálculo de recticulados contínuos, que é o objecto destes apontamentos; porém fá-lo, embora apresentando com toda a clareza o espírito do método, sem um carácter prático, que torne atraente e sedutor para os engenheiros a sua utilização. Cabe este mérito ao Eng.º Araújo Sobreira (1) que deu ao método de relaxação aplicado ao cálculo de recticulados contínuos, uma forma geral e sistemática, que lhe conferem, salvo raras excepções, sobre todos os métodos correntes de que o mais geral e vulgarizado é o método de Cross, indiscutíveis vantagens, na acuidade, exactidão e simplicidade com que resolve os problemas.

Não compreendemos, como não tem sido dado ao método de relaxação uma mais vasta divulgação de que com toda a justiça seria merecedor, facto que ressalta aos olhos de todo aquele, que se debruce um pouco que seja sobre o conhecimento do mesmo.

Nestes apontamentos não apresentaremos o método de relaxação no seu aspecto teórico, visto o assunto que vamos tratar, poder ser considerado como um capítulo mais avançado duma exposição sistemática do mesmo. Apresentaremos estes apontamentos como aplicação pura e simples do método de relaxação, conscios de que, seguindo uma ordem lógica de exposição, se começaria por casos mais simples (2) cuja essência é a mesma dos casos mais complexos, e cuja compreensão esclaceria plenamente os segundos.

2 — Obtenção dos coeficientes de influência

Como é sabido, os coeficientes de influência, não são mais que as acções (note-se bem, as acções e não as reacções) que um elemento linear suposto perfeitamente encastrado nos extremos exerce sobre estes, quando o libertamos de uma das suas ligações exteriores, e segundo essa ligação, lhe imprimimos um movimento unitário positivo (rotação ou translacção).

Para evitar confusão de sinais tomaremos os referidos coeficientes de influência em valor absoluto, e quando forem formados os factores de operação, então ser-lhe-ão atribuídos duma forma extremamente simples e intuitiva os respectivos sinais.

Apresentam-se a seguir os coeficientes de influência e mais elementos referentes ao arco parabólico com projecção vertical constante do momento de inércia, e ao elemento rectilínio de momento de inércia constante, tendo-nos servido para a determinação dos referidos elementos, do teorema de Castigliano.

---

(1) J. Araújo Sobreira: «O Método de Relaxação». *Técnica* de Abril, Maio, Junho, Julho e Outubro de 1954.

(2) Que podem encontrar-se acompanhados da respectiva teoria, nos trabalhos já referidos, do Eng.º Araújo Sobreira.

3 — Arco parabólico

Definição do arco

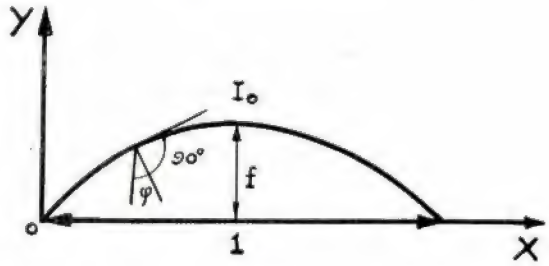


Fig. 1

Lei de variação da secção : $I \cos \varphi = I_0$.

Equação da directriz : $Y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2)$.

Reacções de apoio para várias hipóteses de solicitação do arco perfeitamente encastrado nos extremos

a) Carga concentrada vertical :

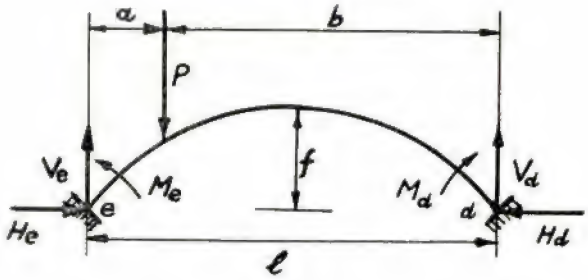


Fig. 2

Valor de a	Valores de				
	M_e	M_d	H_e	V_e	V_d
0,0 *l*	0,0000 P*l*	0,0000 P*l*	0,0000 $\frac{Pl}{f}$	1,0000 P	0,0000 P
0,1	— 0,0608	0,0112	0,0304	0,9720	0,0280
0,2	— 0,0640	0,0320	0,0960	0,8960	0,1040
0,3	— 0,0368	0,0472	0,1654	0,7840	0,2160
0,4	0,0000	0,0480	0,2160	0,6480	0,3520
0,5	0,0312	0 0312	0,2344	0,5000	0,5000
0,6	0,0480	0,0000	0,2160	0,3520	0,6480
0,7	0,0472	— 0,0368	0,1654	0,2160	0,7840
0,8	0,0320	— 0,0640	0,0960	0,1040	0,8960
0,9	0,0112	— 0,0608	0,0304	0,0280	0,9720
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000

b) Carga concentrada horizontal:

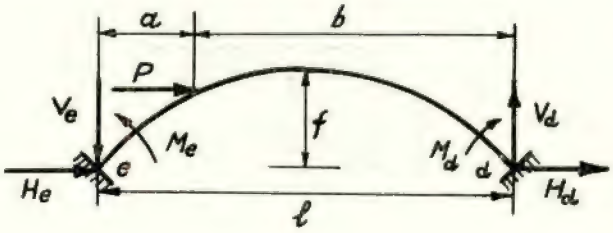


Fig. 3

Valor de a	Valores de				
	M_e	M_d	H_e	H_d	V_e
0,0 *l*	0,0000 Pf	0,0000 Pf	— 1,0000 P	0,0000 P	0,0000 $\frac{Pf}{l}$
0,1	— 0,2236	0,0392	— 0,8942	0,1058	— 0,0972
0,2	— 0,2355	0,0973	— 0,7117	0,2883	— 0,3072
0,3	— 0,1823	0,1285	— 0,5723	0.4277	— 0.5292
0,4	— 0,1382	0,1306	— 0,5098	0,4902	— 0,6912
0,5	— 0,1250	0,1250	— 0,5000	0,5000	— 0,7500
0,6	— 0,1306	0,1382	— 0,4902	0,5098	— 0,6912
0,7	— 0,1285	0,1823	— 0.4277	0.5723	— 0,5292
0,8	— 0,0973	0,2355	— 0,2883	0,7117	— 0,3072
0,9	— 0,0392	0,2236	— 0,1058	0,8942	— 0,0972
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000

c) Carga uniforme vertical:

Carga p sobre	Valores de				
	M_e	M_d	H_e	V_e	V_e
1/4 do vão	$\frac{27\ pl^2}{2048}$	$\frac{9\ pl^2}{2048}$	$\frac{53\ pl^2}{4096\ f}$	0,236 p*l*	0,014 p*l*
1/3 do vão	$\frac{4\ pl^2}{243}$	$\frac{2\ pl^2}{243}$	$\frac{17\ pl^2}{648\ f}$	0,302 p*l*	0,031 p*l*
1/2 do vão	$\frac{pl^2}{64}$	$\frac{pl^2}{64}$	$\frac{pl^2}{16\ f}$	0,406 p*l*	0,094 p*l*
todo o vão	0	0	$\frac{pl^2}{8\ f}$	0,500 p*l*	0,500 p*l*

Coeficientes de influência

Como já dissemos referem-se não às reacções mas sim às acções dos extremos dos elementos sobre os apoios. No entanto tomá-los-emos em valor absoluto pelo motivo já apontado.

As convenções de sinais tanto para os movimentos como para as solicitações, são os que indicam na figura 4.

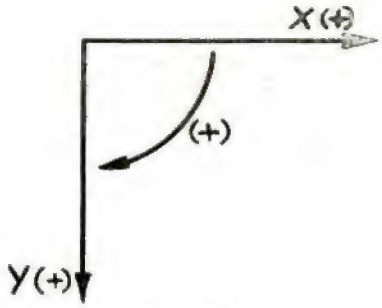


Fig. 4

Vejamos então a determinação dos coeficientes de influência.

a) Rotação de apoio

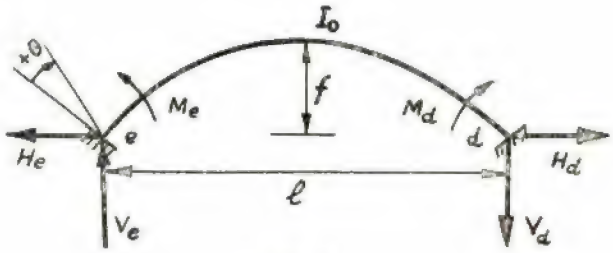


Fig. 5

$$M_e = -\frac{9\,E\,I_o}{l}\,\theta \longrightarrow \theta = 1 \longrightarrow M_e = -\frac{9\,E\,I_o}{l} \longrightarrow {}_m|\widehat{rr}| = \frac{9\,E\,I_o}{l}$$

$$M_d = +\frac{3\,E\,I_o}{l}\,\theta \longrightarrow \theta = 1 \longrightarrow M_d = +\frac{3\,E\,I_o}{l} \longrightarrow {}_f|\widehat{rr}| = \frac{3\,E\,I_o}{l}$$

$$H_e = +\frac{15}{2}\,\frac{E\,I_o}{f\,l}\,\theta \longrightarrow \theta = 1 \longrightarrow H_e = +\frac{15}{2}\,\frac{E\,I_o}{f\,l} \longrightarrow {}_m|\widehat{xr}| = \frac{15\,E\,I_o}{2\,f\,l}$$

$$H_d = -\frac{15}{2}\,\frac{E\,I_o}{f\,l}\,\theta \longrightarrow \theta = 1 \longrightarrow H_d = -\frac{15}{2}\,\frac{E\,I_o}{f\,l} \longrightarrow {}_f|\widehat{xr}| = \frac{15\,E\,I_o}{2\,f\,l}$$

$$V_e = -\frac{6\,E\,I_o}{l^2}\,\theta \longrightarrow \theta = 1 \longrightarrow V_e = -\frac{6\,E\,I_o}{l^2} \longrightarrow {}_m|\widehat{yr}| = \frac{6\,E\,I_o}{l^2}$$

$$V_d = +\frac{6\,E\,I_o}{l^2}\,\theta \longrightarrow \theta = 1 \longrightarrow V_d = +\frac{6\,E\,I_o}{l^2} \longrightarrow {}_f|\widehat{yr}| = \frac{6\,E\,I_o}{l^2}$$

b) Translacção horizontal de apoio.

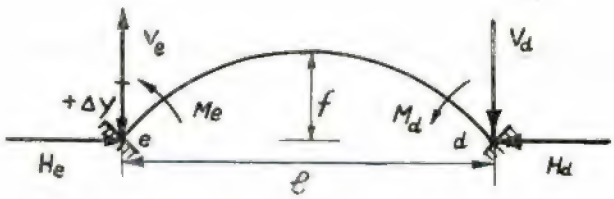


Fig. 6

$$M_e = -\frac{15\,E\,I_o}{2\,f\,l}\,\Delta x \longrightarrow \Delta x = 1 \longrightarrow M_e = -\frac{15\,E\,I_o}{2\,f\,l} \longrightarrow {}_m|\widehat{rx}| = \frac{15\,E\,I_o}{2\,f\,l}$$

$$M_d = +\frac{15\,E\,I_o}{2\,f\,l}\,\Delta x \longrightarrow \Delta x = 1 \longrightarrow M_d = +\frac{15\,E\,I_o}{2\,f\,l} \longrightarrow {}_f|\widehat{rx}| = \frac{15\,E\,I_o}{2\,f\,l}$$

$$H_e = -\frac{45\,E\,I_o}{4\,f^2\,l}\,\Delta x \longrightarrow \Delta x = 1 \longrightarrow H_e = -\frac{45\,E\,I_o}{4\,f^2\,l} \longrightarrow {}_m|\widehat{xx}| = \frac{45\,E\,I_o}{4\,f^2\,l}$$

$$H_d = +\frac{45\,E\,I_o}{4\,f^2\,l}\,\Delta x \longrightarrow \Delta x = 1 \longrightarrow H_e = +\frac{45\,E\,I_o}{4\,f^2\,l} \longrightarrow {}_f|\widehat{xx}| = \frac{45\,E\,I_o}{4\,f^2\,l}$$

$$V_e = 0 \longrightarrow \Delta x = 1 \longrightarrow V_e = 0 \longrightarrow {}_m|\widehat{yx}| = 0$$

$$V_d = 0 \longrightarrow \Delta x = 1 \longrightarrow V_d = 0 \longrightarrow {}_f|\widehat{yx}| = 0$$

c) Translacção vertical de apoio.

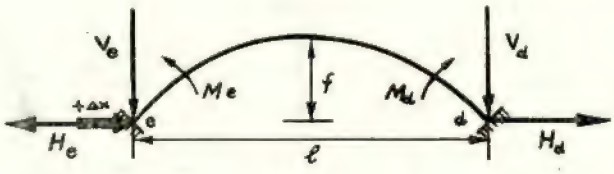


Fig. 7

$$M_e = -\frac{6\,E\,I_o}{l^2}\,\Delta y \longrightarrow \Delta y = 1 \longrightarrow M_e = -\frac{6\,E\,I_o}{l^2} \longrightarrow {}_m|\widehat{ry}| = \frac{6\,E\,I_o}{l^2}$$

$$M_d = -\frac{6\,E\,I_o}{l^2}\,\Delta y \longrightarrow \Delta y = 1 \longrightarrow M_d = -\frac{6\,E\,I_o}{l^2} \longrightarrow {}_f|\widehat{ry}| = \frac{6\,E\,I_o}{l^2}$$

$$H_e = 0 \longrightarrow \Delta y = 1 \longrightarrow H_e = 0 \longrightarrow {}_m|\widehat{xy}| = 0$$

$$H_d = 0 \longrightarrow \Delta y = 1 \longrightarrow H_d = 0 \longrightarrow {}_f|\widehat{xy}| = 0$$

$$V_e = -\frac{12\,E\,I_o}{l^3}\,\Delta y \longrightarrow \Delta y = 1 \longrightarrow V_e = -\frac{12\,E\,I_o}{l^3} \longrightarrow {}_m|\widehat{yy}| = \frac{12\,E\,I_o}{l^3}$$

$$V_d = +\frac{12\,E\,I_o}{l^3}\,\Delta y \longrightarrow \Delta y = 1 \longrightarrow V_d = +\frac{12\,E\,I_o}{l^3} \longrightarrow {}_f|\widehat{yy}| = \frac{12\,E\,I_o}{l^3}$$

Resumindo:

${}_m\|\widehat{rr}\|$	${}_m\|\widehat{rr}\| = \frac{9\,E\,I_o}{l}$
${}_f\|\widehat{rr}\|$	${}_f\|\widehat{rr}\| = \frac{3\,E\,I_o}{l}$
${}_m\|\widehat{xr}\| = {}_f\|\widehat{xr}\| = {}_m\|\widehat{rx}\| = {}_f\|\widehat{rx}\|$	$\|\widehat{xr}\| = \|\widehat{rx}\| = \frac{15\,E\,I_o}{2\,f\,l}$
${}_m\|\widehat{yr}\| = {}_f\|\widehat{yr}\| = {}_m\|\widehat{ry}\| = {}_f\|\widehat{ry}\|$	$\|\widehat{yr}\| = \|\widehat{ry}\| = \frac{6\,E\,I_o}{l^2}$
${}_m\|\widehat{xx}\| = {}_f\|\widehat{xx}\|$	$\|\widehat{xx}\| = \frac{45\,E\,I_o}{4\,f^2\,l}$
${}_m\|\widehat{yy}\| = {}_f\|\widehat{yy}\|$	$\|\widehat{yy}\| = \frac{12\,E\,I_o}{l^3}$
${}_m\|\widehat{xy}\| = {}_f\|\widehat{yx}\| = {}_m\|\widehat{xy}\| = {}_f\|\widehat{xy}\|$	$\|\widehat{xy}\| = \|\widehat{yx}\| = 0$

4 — Elemento rectilíneo de momento de inércia constante

Reacções de apoio para várias hipóteses de solicitação do elemento rectilíneo de momento de inércia constante, e perfeitamente encastrado nos apoios

a) Carga concentrada vertical

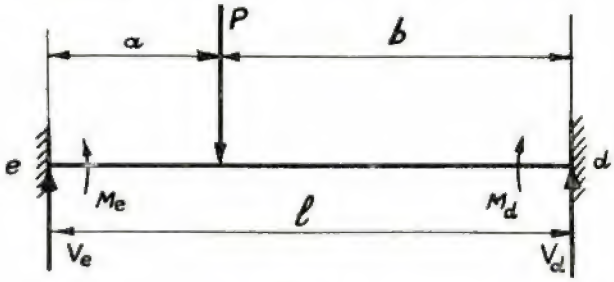


Fig. 8

$$M_e = -\frac{Pab^2}{l^2} \qquad V_e = P\,\frac{b^2}{l^3}\,(l + 2a)$$

$$M_d = -\frac{Pba^2}{l^2} \qquad V_d = P\,\frac{a^2}{l^3}\,(l + 2b)$$

b) Carga uniformemente distribuída :

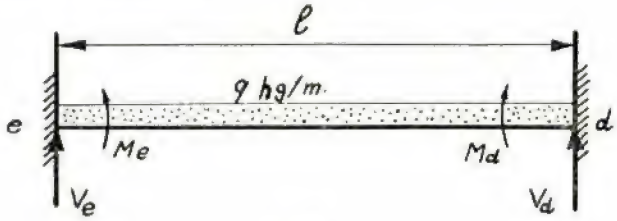


Fig. 9

$$M_e = -\frac{q\,l^2}{12} \qquad V_e = \frac{q\,l}{2}$$

$$M_d = -\frac{q\,l^2}{12} \qquad V_d = \frac{q\,l}{2}$$

Coeficientes de influência dos elementos horizontais

a) Rotação de apoio:

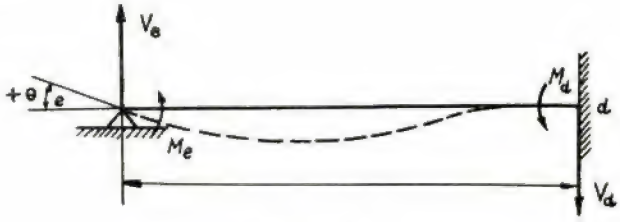


Fig. 10

$$M_e = -\frac{4\,E\,I}{l}\,\theta \longrightarrow \theta = 1 \longrightarrow M_e = -\frac{4\,E\,I}{l} \longrightarrow {}_m|\widehat{rr}| = \frac{4\,E\,I}{l}$$

$$M_d = -\frac{2\,E\,I}{l}\,\theta \longrightarrow \theta = 1 \longrightarrow M_d = -\frac{2\,E\,I}{l} \longrightarrow {}_f|\widehat{rr}| = \frac{2\,E\,I}{l}$$

TEODOLITO TAQUEOMÉTRICO FTI

Otto-Fennel

MODERNO APARELHO DISPONDO DE:

- Observação simultânea dos dois limbos pelo microscópio colocado ao lado da ocular da objectiva
- Leitura por sistema directo de 1c e décimos por estimativa
- Leitura do nível vertical por coincidência
- Prumo óptico
- Grande luminosidade

Características ópticas e mecânicas

Telescópio analáctico com lente de focagem interna, retículo medidor de distância, telescópio reversível com o extremo da objectiva.

Constante de adição	zero
Constante de multiplicação	100
Comprimento do telescópio	190 mm
Abertura da objectiva	36 mm
Ampliação	28 x
Distância mínima de mira	1 m
Nível redondo	6' a 8'
Nível de reversão	30"
Nível de horizontalidade paralelo ao eixo de inclinação	40"

Nível junto ao círculo vertical legível por ajustamento da coincidência 40". Passo circunferencial sobre círculos de vidro 360° ou 400 g, de 1° ou de 1 g.

Diâmetro do círculo horizontal 90 mm, do círculo vertical 70 mm

Leitura directa horizontal	1'	1c
Leitura por avaliação	1'	1c
Leitura directa vertical	0,1' = 6"	0,2c = 20cc
Leitura por avaliação	0,2' = 12"	0,25c = 25cc

Pesos: Instrumento 4,7 kg, Tripé com pés extensíveis 6,0 kg, Caixa metálica 4,0 kg

REPRESENTANTES

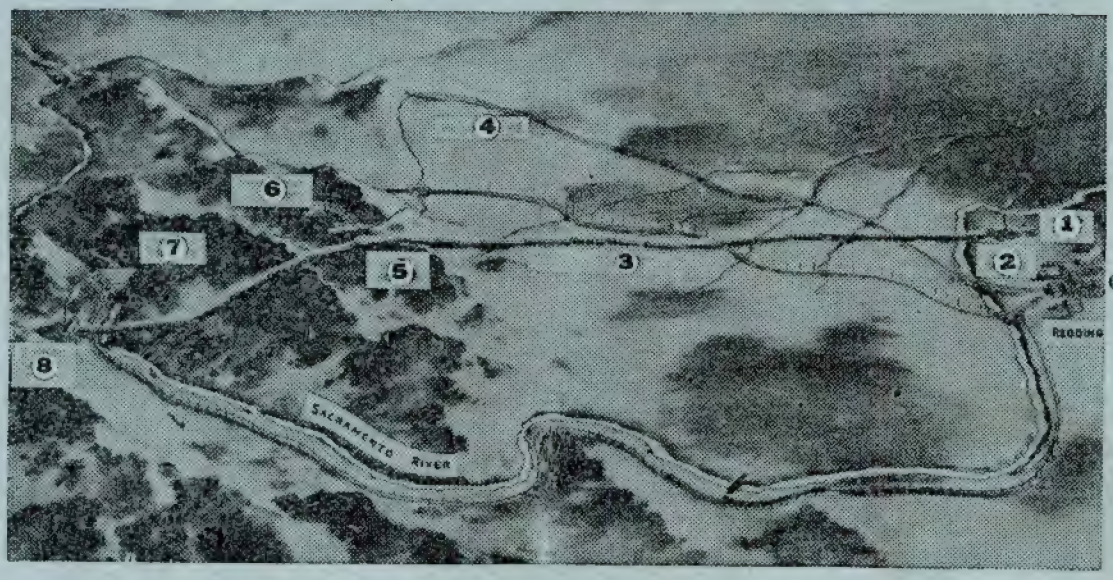
PAPELARIA FERNANDES

L. DO RATO, 13—TELEF. 66 11 16—7 LINHAS—R. DO OURO, 145—TELEF. 28 36 1

LISBOA

Cerca de 30 km de correias transportadoras

numa só instalação.



Instalação transportadora de Great Central Valley, Califórnia

Esta instalação, que foi montada especialmente para transporte da areia e brita necessária à construção da Barragem Shasta, no Rio Sacramento, consta de 26 correias transportadoras sem-fim, de 1.200 m de comprido, 36'' de largo e accionadas por motores de 200 h. p. cada uma.
O sistema tem uma capacidade de transporte de 1.000 toneladas por hora, a uma velocidade de cerca de 3 m/seg. O material em trânsito conserva-se sobre a transportadora (3) durante cerca de hora e meia, para percorrer 15.300 m, desde a instalação de britagem (1) a uma altitude de 160 m acima do nível do mar (2), atravessando uma auto estrada (4), atingindo uma altitude de 475 m (5) e cruzando por duas vezes o rio, até atingir o ponto de construção da barragem (7).

Use também correias transportadoras

Um tipo especial para cada serviço

Distribuidores exclusivos: **CANELAS & FIGUEIREDO, L.DA**

Rua dos Fanqueiros, 46 — LISBOA

Telef. 25058 / 24502 / 21729

Teleg.: CANELASCO

$$V_e = -\frac{6EI}{l^2}\,\theta \longrightarrow \theta = 1 \longrightarrow V_e = -\frac{6EI}{l^2} \longrightarrow {}_m|\widehat{yr}| = \frac{6EI}{l^2}$$

$$V_d = +\frac{6EI}{l^2}\,\theta \longrightarrow \theta = 1 \longrightarrow V_d = +\frac{6EI}{l^2} \longrightarrow {}_f|\widehat{yr}| = \frac{6EI}{l^2}$$

b) Deslocamento vertical de apoio:

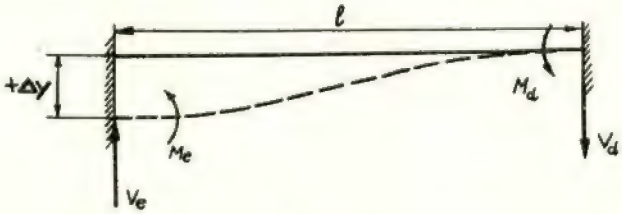


Fig. 11

$$M_e = -\frac{6EI}{l^2}\,\Delta y \longrightarrow \Delta y = 1 \longrightarrow M_e = -\frac{6EI}{l^2} \longrightarrow {}_m|\widehat{ry}| = \frac{6EI}{l^2}$$

$$M_d = -\frac{6EI}{l^2}\,\Delta y \longrightarrow \Delta y = 1 \longrightarrow M_d = -\frac{6EI}{l^2} \longrightarrow {}_f|\widehat{ry}| = \frac{6EI}{l^2}$$

$$V_e = -\frac{12EI}{l^3}\,\Delta y \longrightarrow \Delta y = 1 \longrightarrow V_e = -\frac{12EI}{l^3} \longrightarrow {}_m|\widehat{yy}| = \frac{12EI}{l^3}$$

$$V_d = +\frac{12EI}{l^3}\,\Delta y \longrightarrow \Delta y = 1 \longrightarrow V_d = +\frac{12EI}{l^3} \longrightarrow {}_f|\widehat{yy}| = \frac{12EI}{l^3}$$

Resumindo:

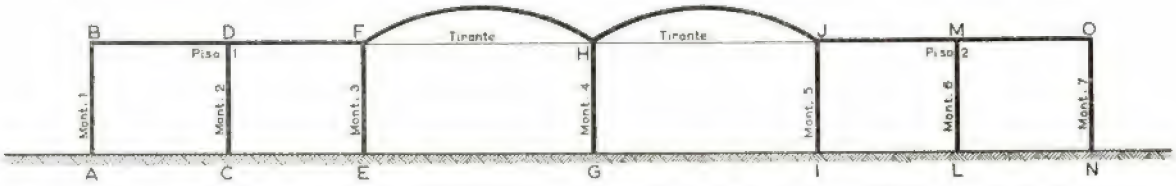
${}_m|\widehat{rr}|$	${}_m|\widehat{rr}| = \frac{4EI}{l}$
${}_f|\widehat{rr}|$	${}_f|\widehat{rr}| = \frac{2EI}{l}$
${}_m|\widehat{yr}| = {}_f|\widehat{yr}| = {}_m|\widehat{ry}| = {}_f|\widehat{ry}|$	$|\widehat{yr}| = |\widehat{ry}| = \frac{6EI}{l^2}$
${}_m|\widehat{yy}| = {}_f|\widehat{yy}|$	$|\widehat{yy}| = \frac{12EI}{l^3}$

Coeficientes de influência do elemento vertical

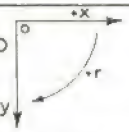
Os coeficientes de influência para este caso, podem tirar-se muito simplesmente do anterior, substituindo y por x. Teremos então:

${}_m|\widehat{rr}|$	${}_m|\widehat{rr}| = \frac{4EI}{l}$
${}_f|\widehat{rr}|$	${}_f|\widehat{rr}| = \frac{2EI}{l}$
${}_m|\widehat{xr}| = {}_f|\widehat{xr}| = {}_m|\widehat{rx}| = {}_f|\widehat{rx}|$	$|\widehat{xr}| = |\widehat{rx}| = \frac{6EI}{l^2}$
${}_m|\widehat{xx}| = {}_f|\widehat{xx}|$	$|\widehat{xx}| = \frac{12EI}{l^3}$

ESTRUTURA TIPO



CONVENÇÃO DE SINAIS

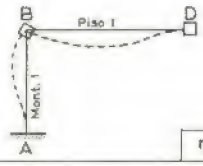


FACTORES DE OPERAÇÃO

FOLHA Nº.1

Relaxação circular do nó

Tipo B



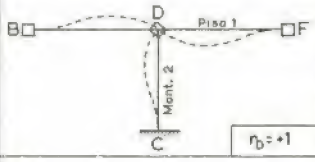
$r_B = +1$

$N_A = -_r|\widehat{rr}|_{AB}$; $N_B = -({}_m|\widehat{rr}|_{AB} + {}_m|\widehat{rr}|_{BD})$; $N_D = -_r|\widehat{rr}|_{BD}$

$X_1 = |\widehat{xr}|_{AB}$; $X_A = -|\widehat{xr}|_{AB}$

$Y_1 = -|\widehat{yr}|_{BD}$; $Y_D = |\widehat{yr}|_{BD}$

Tipo D



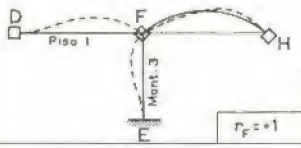
$r_D = +1$

$N_B = -_r|\widehat{rr}|_{BD}$; $N_C = -_r|\widehat{rr}|_{CD}$; $N_D = -({}_m|\widehat{rr}|_{BD} + {}_m|\widehat{rr}|_{DC} + {}_m|\widehat{rr}|_{DF})$; $N_F = -_r|\widehat{rr}|_{DF}$

$X_1 = |\widehat{xr}|_{DC}$; $X_C = -|\widehat{xr}|_{DC}$

$Y_2 = |\widehat{yr}|_{BD} - |\widehat{yr}|_{DF}$; $Y_B = -|\widehat{yr}|_{BD}$; $Y_F = |\widehat{yr}|_{DF}$

Tipo F



$r_F = +1$

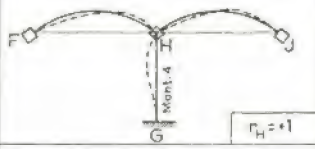
$N_D = -_r|\widehat{rr}|_{DF}$; $N_E = -_r|\widehat{rr}|_{EF}$; $N_F = -({}_m|\widehat{rr}|_{DF} + {}_m|\widehat{rr}|_{FE} + {}_m|\widehat{rr}|_{FH})$; $N_H = {}_r|\widehat{rr}|_{FH}$

$X_1 = |\widehat{xr}|_{FE} - |\widehat{xr}|_{FH}$; $X_H = |\widehat{xr}|_{FH}$; $X_E = -|\widehat{xr}|_{FE}$

$Y_3 = |\widehat{yr}|_{DF} - |\widehat{yr}|_{FH}$; $Y_H = |\widehat{yr}|_{FH}$; $Y_D = -|\widehat{yr}|_{DF}$

não há influência do tirante

Tipo H



$r_H = +1$

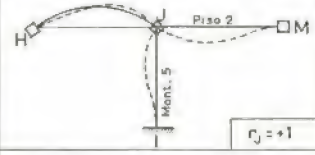
$N_F = {}_r|\widehat{rr}|_{FH}$; $N_G = -_r|\widehat{rr}|_{GH}$; $N_H = -({}_m|\widehat{rr}|_{FH} + {}_m|\widehat{rr}|_{GH} + {}_m|\widehat{rr}|_{HJ})$; $N_J = {}_r|\widehat{rr}|_{HJ}$

$X_F = |\widehat{xr}|_{FH}$; $X_H = -|\widehat{xr}|_{FH} + |\widehat{xr}|_{GH} - |\widehat{xr}|_{HJ}$; $X_J = |\widehat{xr}|_{HJ}$; $X_G = -|\widehat{xr}|_{GH}$

$Y_F = -|\widehat{yr}|_{FH}$; $Y_H = |\widehat{yr}|_{FH} - |\widehat{yr}|_{HJ}$; $Y_J = |\widehat{yr}|_{HJ}$

não há influência do tirante

Tipo J



$r_J = +1$

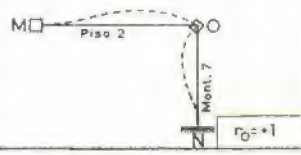
$N_H = {}_r|\widehat{rr}|_{HJ}$; $N_I = -_r|\widehat{rr}|_{IJ}$; $N_J = -({}_m|\widehat{rr}|_{HJ} + {}_m|\widehat{rr}|_{JI} + {}_m|\widehat{rr}|_{JM})$; $N_M = -_r|\widehat{rr}|_{JM}$

$X_H = |\widehat{xr}|_{HJ}$; $X_2 = -|\widehat{xr}|_{HJ} + |\widehat{xr}|_{IJ}$; $X_I = -|\widehat{xr}|_{IJ}$

$Y_H = -|\widehat{yr}|_{HJ}$; $Y_5 = |\widehat{yr}|_{HJ} - |\widehat{yr}|_{JM}$; $Y_M = |\widehat{yr}|_{JM}$

não há influência do tirante

Tipo O



$r_O = +1$

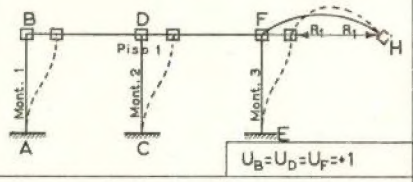
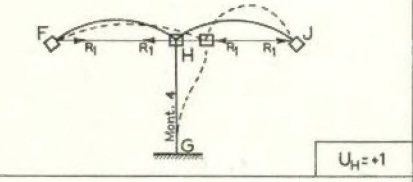
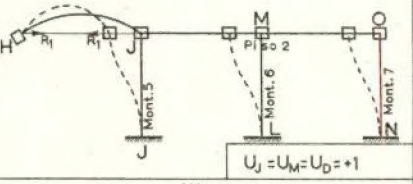
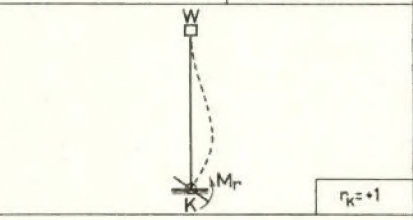
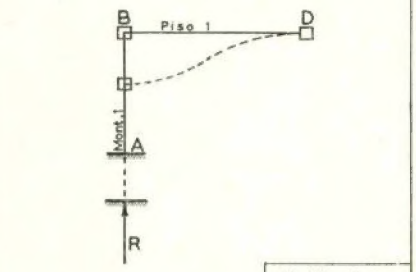
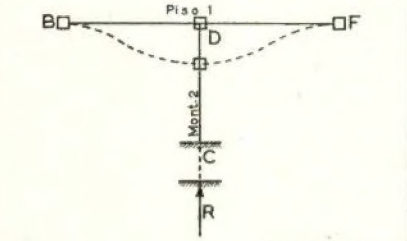
$N_M = -_r|\widehat{rr}|_{MO}$; $N_O = -({}_m|\widehat{rr}|_{MO} + {}_m|\widehat{rr}|_{ON})$; $N_N = -_r|\widehat{rr}|_{ON}$

$X_2 = |\widehat{xr}|_{NO}$; $X_N = -|\widehat{xr}|_{NO}$

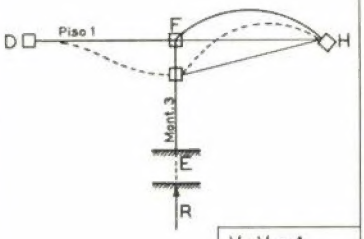
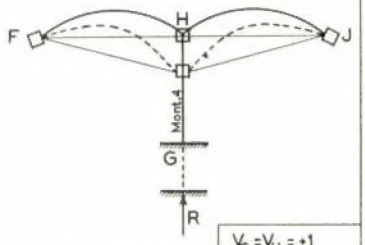
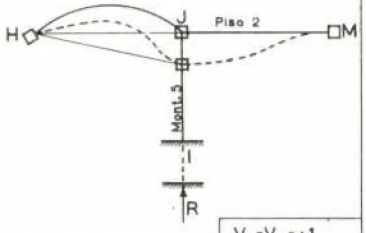
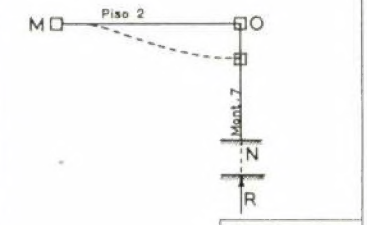
$Y_7 = |\widehat{yr}|_{NO}$; $Y_M = -|\widehat{yr}|_{MO}$

Fig. 12

(Continua)

		CONVENÇÃO DE SINAIS	FACTORES DE OPERAÇÃO — FOLHA Nº2
Relaxação horizontal	de piso tipo 1	 $U_B=U_D=U_F=+1$	$N_A=\lvert\widehat{rx}\rvert_{AB}$; $N_B=\lvert\widehat{rx}\rvert_{AB}$; $N_C=\lvert\widehat{rx}\rvert_{CD}$; $N_D=\lvert\widehat{rx}\rvert_{CD}$; $N_G=\lvert\widehat{rx}\rvert_{EF}$; $N_F=\lvert\widehat{rx}\rvert_{EF}-\lvert\widehat{rx}\rvert_{FH}$; $N_H=\lvert\widehat{rx}\rvert_{FH}$ $X_1=-(\lvert\widehat{xx}\rvert_{AB}+\lvert\widehat{xx}\rvert_{CD}+\lvert\widehat{xx}\rvert_{EF}+\lvert\widehat{xx}\rvert_{FH}+R_1)$; $X_H=\lvert\widehat{xx}\rvert_{FH}+R_1$; $X_A=X_C=X_E=\lvert\widehat{xx}\rvert_{\substack{AB\\CD\\EF}}$
	de no tipo H	 $U_H=+1$	$N_F=\lvert\widehat{rx}\rvert_{FH}$; $N_G=\lvert\widehat{rx}\rvert_{GH}$; $N_H=-\lvert\widehat{rx}\rvert_{FH}-\lvert\widehat{rx}\rvert_{HJ}+\lvert\widehat{rx}\rvert_{GH}$; $N_J=\lvert\widehat{rx}\rvert_{HJ}$ $X_F=\lvert\widehat{xx}\rvert_{FH}+R_1$; $X_H=-(\lvert\widehat{xx}\rvert_{FH}+\lvert\widehat{xx}\rvert_{GH}+\lvert\widehat{xx}\rvert_{HJ}+2R_1)$; $X_J=\lvert\widehat{xx}\rvert_{HJ}+R_1$; $X_G=\lvert\widehat{xx}\rvert_{GH}$
	de piso tipo 2	 $U_J=U_M=U_D=+1$	$N_H=\lvert\widehat{rx}\rvert_{HJ}$; $N_J=\lvert\widehat{rx}\rvert_{IJ}-\lvert\widehat{rx}\rvert_{HJ}$; $N_I=\lvert\widehat{rx}\rvert_{IJ}$; $N_L=\lvert\widehat{rx}\rvert_{LM}$; $N_M=\lvert\widehat{rx}\rvert_{LM}$; $N_N=\lvert\widehat{rx}\rvert_{NO}$; $N_O=\lvert\widehat{rx}\rvert_{NO}$ $X_H=\lvert\widehat{xx}\rvert_{HJ}+R_1$; $X_2=-(\lvert\widehat{xx}\rvert_{HJ}+\lvert\widehat{xx}\rvert_{IJ}+\lvert\widehat{xx}\rvert_{LM}+\lvert\widehat{xx}\rvert_{NO}+R_1)$; $X_J=X_L=X_N=\lvert\widehat{xx}\rvert_{\substack{IJ\\LM\\NO}}$
Relaxação circular de apoio de montante com encastramento elástico		 $r_K=+1$	$N_W=-r\lvert\widehat{rr}\rvert_{KW}$; $N_K=-(m\lvert\widehat{rr}\rvert_{KW}+M_r)$ $X_W=\lvert\widehat{xr}\rvert_{KW}$; $X_K=-\lvert\widehat{xr}\rvert_{KW}$
Assentamento elástico do montante	Tipo 1	 $V_A=V_B=+1$	$N_B=-\lvert\widehat{ry}\rvert_{BD}$; $N_D=-\lvert\widehat{ry}\rvert_{BD}$ $Y_1=-(\lvert\widehat{yy}\rvert_{BD}+R)$; $Y_D=\lvert\widehat{yy}\rvert_{BD}$ Quando R=O teremos o assentamento não elástico ou desigual
	Tipo 2	 $V_C=V_D=+1$	$N_B=\lvert\widehat{ry}\rvert_{BD}$; $N_D=\lvert\widehat{ry}\rvert_{BD}-\lvert\widehat{ry}\rvert_{DF}$; $N_F=-\lvert\widehat{ry}\rvert_{DF}$ $Y_2=-(\lvert\widehat{yy}\rvert_{BD}+\lvert\widehat{yy}\rvert_{DF}+R)$; $Y_B=\lvert\widehat{yy}\rvert_{BD}$; $Y_F=\lvert\widehat{yy}\rvert_{DF}$ Quando R=O teremos o assentamento não elástico ou desigual

(Continua)

		CONVENÇÃO DE SINAIS	FACTORES DE OPERAÇÃO — FOLHA Nº 3
assentamento elástico do montante	Tipo 3	 $V_E = V_F = +1$	$N_D = \lvert\overline{ry}\rvert_{DF}$; $N_F = \lvert\overline{ry}\rvert_{DF} - \lvert\overline{ry}\rvert_{FH}$; $N_H = -\lvert\overline{ry}\rvert_{FH}$ $Y_D = \lvert\overline{yy}\rvert_{DF}$; $Y_3 = -(\lvert\overline{yy}\rvert_{DF} + \lvert\overline{yy}\rvert_{FH} + R)$; $Y_H = \lvert\overline{yy}\rvert_{FH}$ Quando R=0 teremos o assentamento não elástico ou desigual não há influência do tirante
	Tipo 4	 $V_G = V_H = +1$	$N_F = \lvert\overline{ry}\rvert_{FH}$; $N_H = \lvert\overline{ry}\rvert_{FH} - \lvert\overline{ry}\rvert_{HJ}$; $N_J = -\lvert\overline{ry}\rvert_{HJ}$ $Y_F = \lvert\overline{yy}\rvert_{FH}$; $Y_4 = -(\lvert\overline{yy}\rvert_{FH} + \lvert\overline{yy}\rvert_{HJ} + R)$; $Y_J = \lvert\overline{yy}\rvert_{HJ}$ Quando R=0 teremos o assentamento não elástico ou desigual não há influência do tirante
	Tipo 5	 $V_J = V_J = +1$	$N_H = \lvert\overline{ry}\rvert_{HJ}$; $N_5 = \lvert\overline{ry}\rvert_{HJ} - \lvert\overline{ry}\rvert_{JM}$; $N_M = -\lvert\overline{ry}\rvert_{JM}$ $Y_H = \lvert\overline{yy}\rvert_{HJ}$; $Y_5 = -(\lvert\overline{yy}\rvert_{HJ} + \lvert\overline{yy}\rvert_{JM} + R)$; $Y_M = \lvert\overline{yy}\rvert_{JM}$ Quando R=0 teremos o assentamento não elástico ou desigual não há influência do tirante
	Tipo 7	 $V_N = V_O = +1$	$N_M = \lvert\overline{ry}\rvert_{MO}$; $N_O = \lvert\overline{ry}\rvert_{MO}$ $Y_M = \lvert\overline{yy}\rvert_{MO}$; $Y_7 = -(\lvert\overline{yy}\rvert_{MO} + R)$ Quando R=0 teremos o assentamento não elástico ou desigual

5 — Factores de operação

Para o caso que estamos a estudar, dada uma estrutura recticular contínua, chama-se factores de operação, às acções (forças e momentos) que se exercem nos extremos dos elementos contínuos, quando se dá ao ponto de convergência dos mesmos, uma relaxação unitária positiva (rotação ou translacção). Agora já se atende ao conveniente sinal das referidas acções.

Os impressos da figura 11-a permitem a obtenção dos factores de operação, e são organizados debaixo do conceito acima referido. Como é obvio, são aplicáveis não só à peça rectilínea de momento de inércia constante, e ao arco que definimos, mas também a peças rectilíneas de momento de inércia variável e a qualquer tipo de arco.

6 — Algumas aplicações do método de relaxação

I APLICAÇÃO (1)

Forma dimensões e solicitação

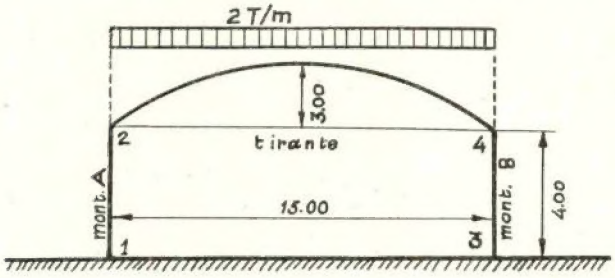


Fig. 13

Há uma variação de temperatura de 30 °C em todo o contorno. A dilatação dos montantes em nada influi. A dilatação do arco se fosse possível dilatar-se livremente seria

$$\Delta l = \alpha \Delta t l = 10^{-5} \times 30 \times 15 = 0{,}00450 \text{ m}$$

O caso de uma retracção seria tratado anàlogamente.

Elementos			Secção (m^2)	I m^{-4}	E (tn/m^2)	l (m)
pilar	arco	tirante				
$\overline{1,2}$	–	–	$0{,}30 \times 0{,}30$	$6{,}7 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
$\overline{3,4}$	–	–	$0{,}30 \times 0{,}30$	$6{,}7 \times 10^{-4}$	21×10^5	4,00
–	$\overset{\frown}{2,4}$	–	$0{,}40 \times 0{,}30$	$(I_0)\ 6{,}7 \times 10^{-4}$	21×10^5	15,00
–	–	$\overline{2,4}$	0 0002	–	21×10^6	15,00

Condições de apoio

Encastramento perfeito; não há qualquer assentamento.

Valor de R_1 para o tirante

R_1 é a carga que determina sobre o tirante, um alongamento elástico unitário. Virá portanto

$$\frac{P}{S} = \frac{\Delta l}{1} E_a \longrightarrow P = \frac{S \Delta l E_a}{15} = 0{,}0002 \times 1 \times 21 \times 10^6$$

$$R_1 = P = 280 \text{ Tn}$$

(1) Nas aplicações que se seguem, não há o intuito de dimensionamento correcto das estruturas, mas apenas o de mostrar algumas aplicações do método de relaxaçãe.

Coeficientes de influência

Elem.	E (tn/m²)	I (m⁴)	l (m)	$\lvert\widehat{xx}\rvert$	$\lvert\widehat{yy}\rvert$	$\lvert\widehat{rx}\rvert$ $\lvert\widehat{xr}\rvert$	$\lvert\widehat{ry}\rvert$ $\lvert\widehat{yr}\rvert$	$\lvert\widehat{rr}\rvert$ m	$\lvert\widehat{rr}\rvert$ f
$\overline{1,2}$	21×10^5	$6,7 \times 10^{-4}$	4,00	263,8	–	527,6	–	1.407,0	703,5
$\overline{3,4}$	21×10^5	$6,7 \times 10^{-4}$	4,00	263,8	–	527,6	–	1,407,0	703,5
$\widehat{2,4}$	21×10^5	$6,7 \times 10^{-4}$	15,00	117,2	5,0	234,5	37,5	844,2	281,4

Factores de operação

N.º	Tipo	1 N_2	2 N_4	3 X_2	4 X_4	5 N_1	6 N_3	7 X_1	8 X_3	9 Y_A	10 Y_B
1	$r_2 = 1$	— 2.251,2	281,4	293,1	234,5	— 703,5	0	— 527,6	0	— 37,5	37,5
2	$r_4 = 1$	281,4	— 2.251,2	234,5	293,1	0	— 703,5	0	— 527,6	— 37,5	37,5
3	$U_2 = 1$	293,1	234,5	— 661,0	397,1	527,6	0	263,8	0	0	0
4	$U_4 = 4$	234,5	293,1	397,2	— 661,0	0	527,6	0	263,8	0	0
5	$r_2 = -r_4 = 1$	— 2.532,6	2.532,6	38,6	— 58,6	— 703,5	703,5	— 527,6	527,6	0	0
6	$U_2 = -U_4 = 1$	58,6	— 58,6	— 1.058,2	1.058,2	527,6	— 527,6	263,8	— 263,8	0	0

Verificação dos coeficientes de influência e factores de operação

(1) — : $-2.251,2 + 281,4 - 703,5 + 37,5 \times 15 + 527,6 \times 4 = 0$

(2) — : $281,4 - 2.251,2 - 703,5 + 37,5 \times 15 + 527,6 \times 4 = 0$

(3) — : $293,1 + 234,5 + 527,6 - 263,8 \times 4 = 0$

(4) — : $234,5 + 293,1 + 527,6 - 263,8 \times 4 = 0$